



# John Adams Library.




IN THE CUSTODY OF THE  
BOSTON PUBLIC LIBRARY.



SHELF N<sup>o</sup>

4 101.9



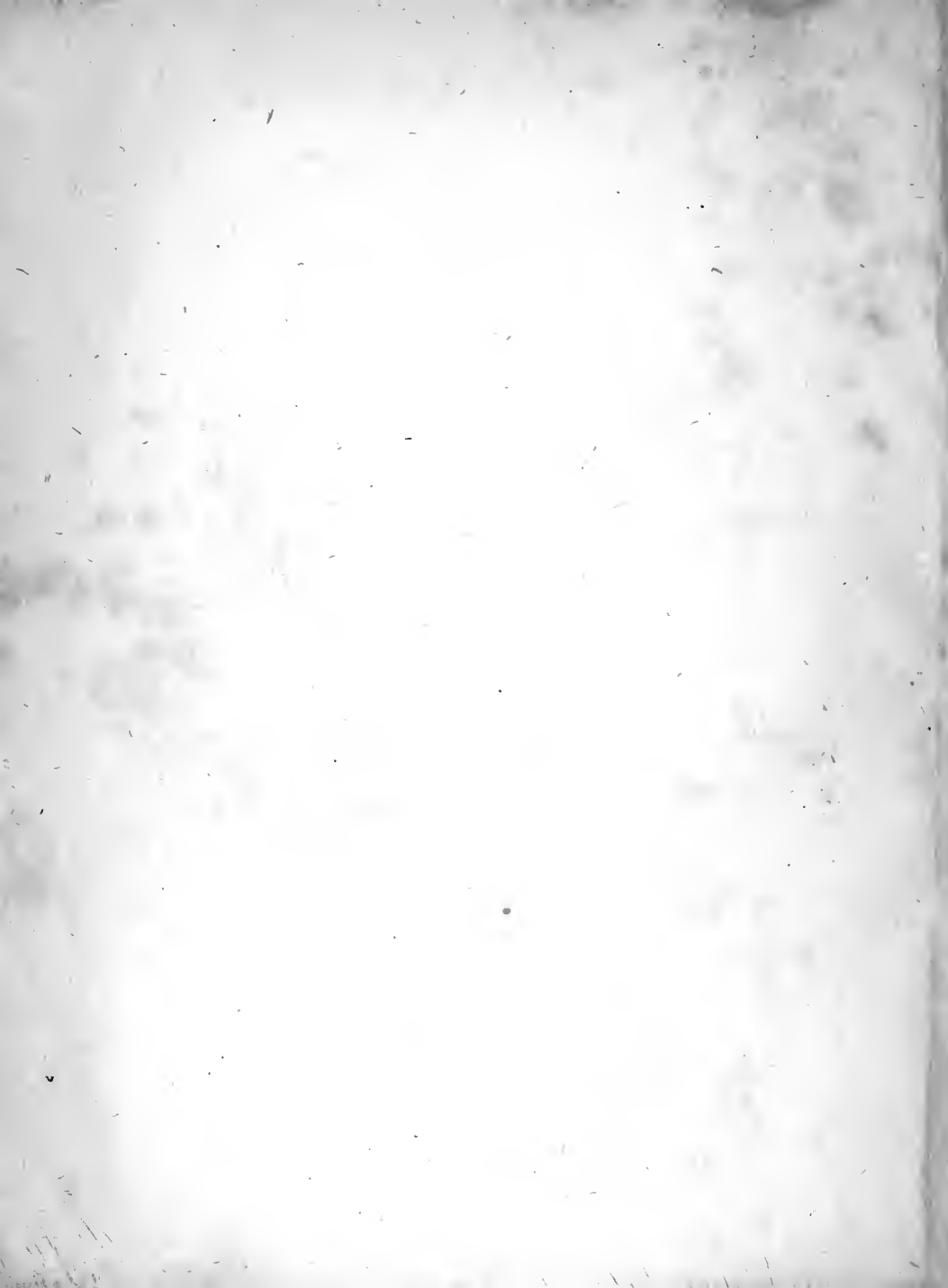


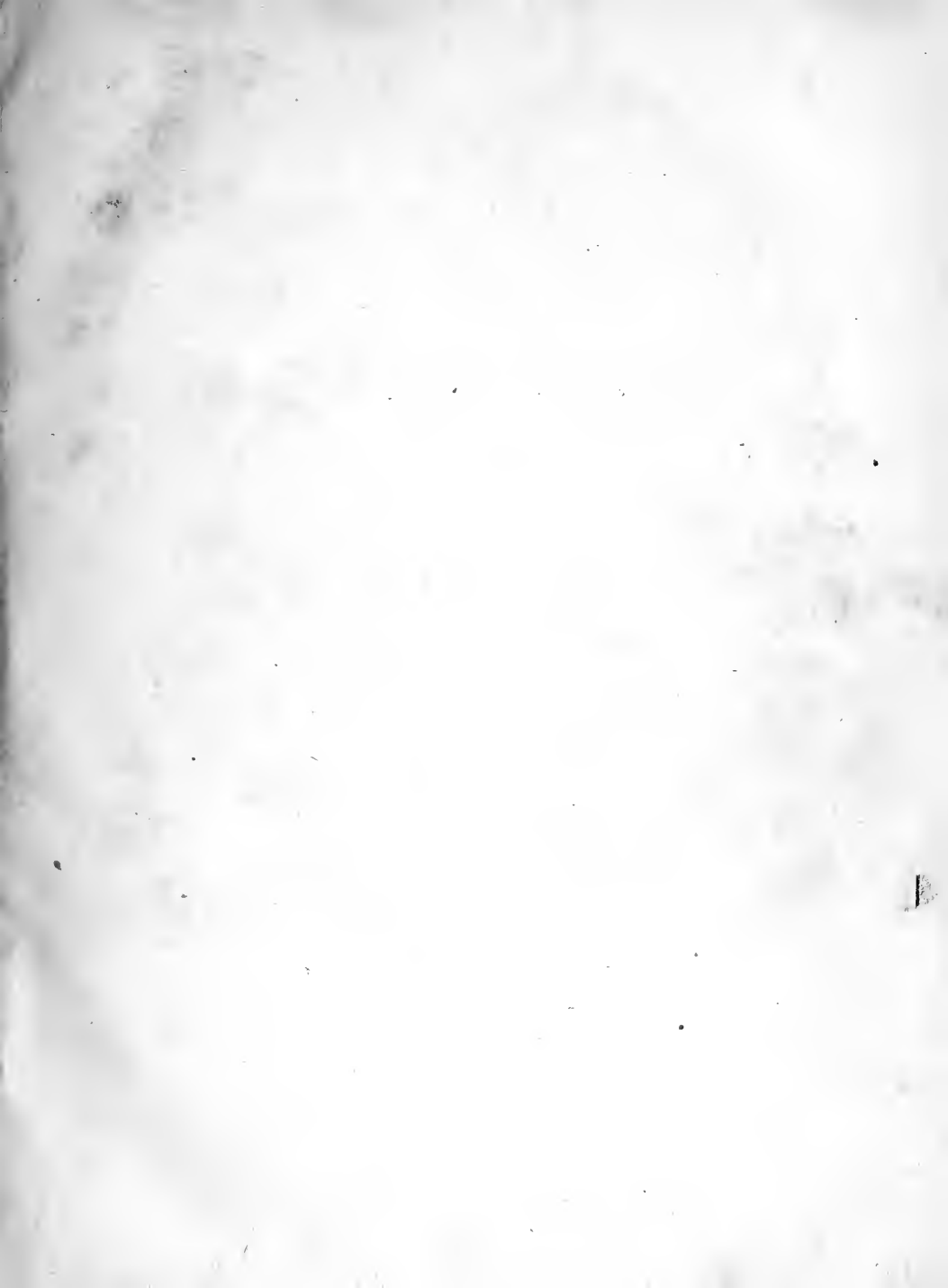
Digitized by the Internet Archive  
in 2011

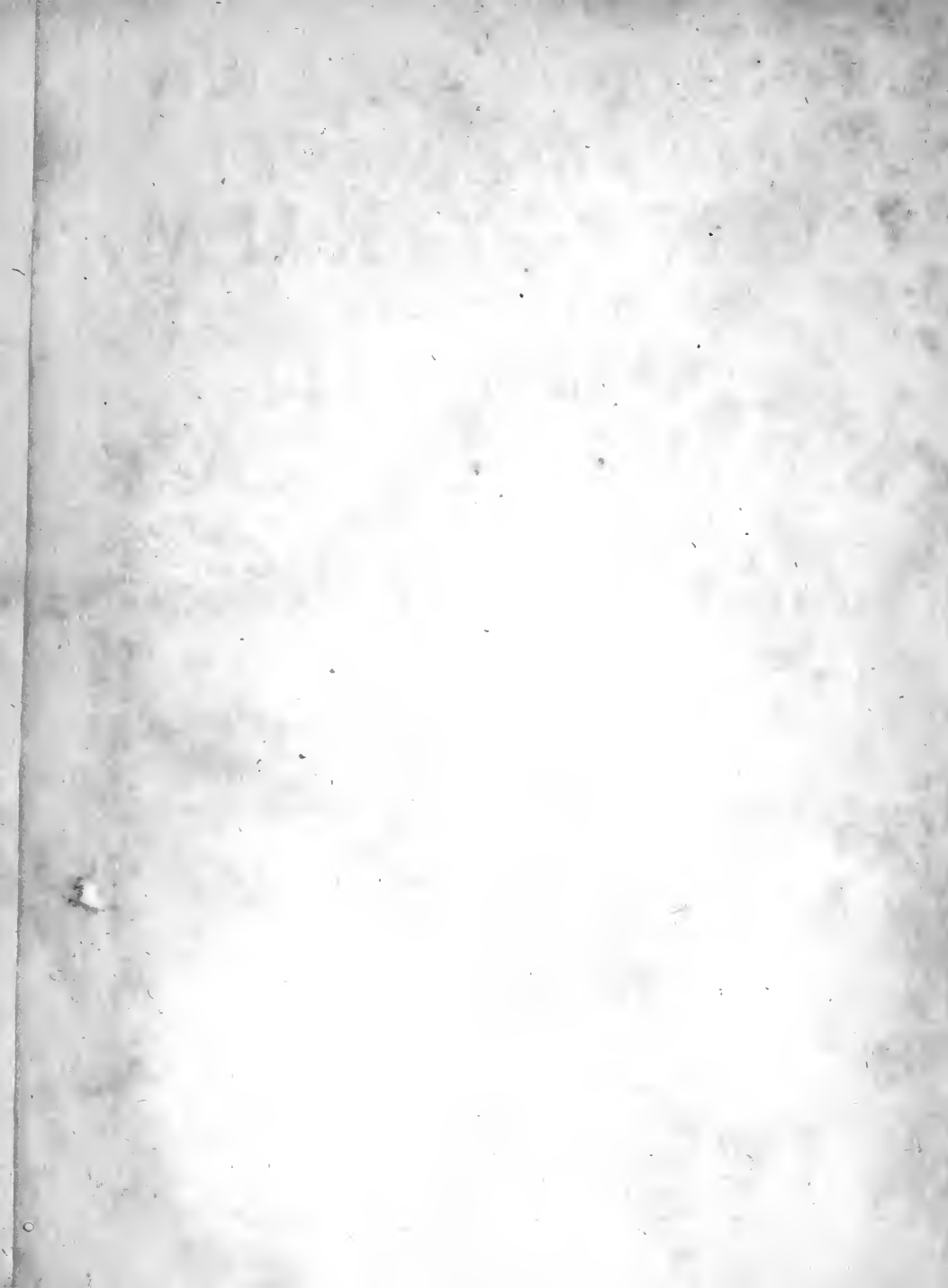
<http://www.archive.org/details/archimedisoperaa00arch>











ARCHIMEDIS OPERA:  
APOLLONII PERGÆI  
CONICORUM  
LIBRI III.

(4)

THEODOSII  
SPHÆRICA:  
METHODO NOVA  
ILLUSTRATA, & Succinæ DEMONSTRATA.

---

PER  
IS. BARROW, Exprofessorem *Lucasianum* CANTAB.  
*Stoph:* & Societatis Regiæ Soc. *Rowell*

---



---

LONDINI,  
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Rob. Scott*, in vico  
*Little Britain.* 1675.

---

XX  
PLANS  
No 1.9



# Lectori.

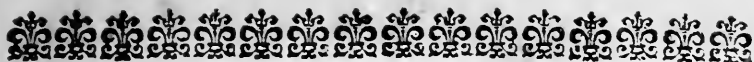


*Etustos authores, scientiarum  
parentes, abi interitu salvos  
præstari, posterorum interesse  
videtur, nè ingrati audiant.*

*Neque tametsi quæ continent pleraque no-  
vis artificiis vel promptius elici, vel  
concisius æstrui possint, fructu penitus de-  
stituitur illorum lectio. Nam amœnum  
imprimis videtur quibus à fundamentis  
tantum in fastigium evectæ sunt scientiæ  
dispicere; tum haud inutile fuerit degusta-  
re fontes, è quibus cuncta fermè recenti-  
orum inventa dimanârunt; istorum quippe  
perquam ingeniosas atque subtiles perse-  
quendo vel æmulando methodos horum  
emicuit industria. Porro sincerum demon-*

*strandī gūstū ac peritiā non aliunde  
 quis opinor felicius hāserit, quā ex iis,  
 quorum in theorematīs deducendis prācipue  
 relucēt solertia ac elegantiā; quas ut  
 nemo transgredi possit, itā vix assequi quis-  
 quam valeat ab illorum Scriptis peregrinus:  
 Ut taceam, cū à posteris hęc scripta suis  
 firmandis prāsternantur, allegenturque pas-  
 sim, illorum referre qui hęc studia tractant,  
 ea prāstō ad manum, nē dicam ad unguem,  
 habere: Id ut promptē tibi succedat, &  
 quā exiguo impendio, prāstitura videtur  
 hęc editio; saltem prae illis, quae enormi  
 juxta mole spissae ac pretio carae hactenus  
 prostant; sin hęc nihilominus displiceat,  
 det ille quāso tibi penas, qui amicitia pra-  
 potenter abusus, me nequicquam reclaman-  
 te, protrusit hęc crepundia; luci publicae  
 minimē nata vel debita. Vale.*





Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum  
hîc subjungitur interpretatio.

|                          |   |  |  |
|--------------------------|---|--|--|
| $A \div B$ ,             | <i>hoc est</i>  | $A \& B$   | <i>simul accepta.</i>  |
| $A - B$ ,                |   | $A$ ,  | <i>depritâ B.</i>  |
| $A - : B$ ,              |   |  | <i>differentia ipsarum A, &amp; B.</i>   |
| $A \times B$ ,           |   |  | <i>A multiplicata, vel ducta in B.</i>   |
| $\frac{A}{B}$            |   |  | <i>A divisa per B, vel applicata ad B.</i>   |
| $A = B$ ,                |   |  | <i>A æquatur ipsi B.</i>   |
| $A \sqsupset B$ ,        |   |  | <i>A major est quàm B.</i>   |
| $A \sqsubset B$ ,        |   |  | <i>A minor est quàm B.</i>   |
| $A.B :: C.D$ ,           |   |  | <i>A ad B eandem rationem habet, quàm C ad D.</i>  |
| $A, B, C, D \div \div$ , |   |  | <i>A, B, C, D sunt continuè proportionales.</i>  |
| $A.B \sqsupset C.D$ ,    |   |  | <i>A ad B majorem rationem habet, quàm C ad D.</i>   |
| $A.B \sqsubset C.D$ ,    |   |  | <i>A ad B minorem rationem habet, quàm C ad D.</i>   |
| $A.B \div C.D$           | $\begin{matrix} = \\ \sqsupset \\ \sqsubset \end{matrix}$ | $\left\{ \begin{matrix} M.N. \text{ Rationes } A \text{ ad } B, \\ \& C \text{ ad } D \text{ composita} \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} \text{adequant} \\ \text{excedunt} \\ \text{deficiunt à} \end{matrix} \right\} \text{ratione } M \text{ ad } N.$ |
| $Aq$ ,                   |   |  | <i>Quadratum ex A.</i>   |
| $\sqrt{A}$ ,             |   |  | <i>Latius, vel radix quadrata ipsius A.</i>  |
| $Ac$ ,                   |   |  | <i>Cubus ex A.</i>   |
| $\sqrt{Aq} \div Bq$ ,    |   |  | <i>Latius compositi ex Aq &amp; Bq.</i>  |

Reliquas, si quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ  
capiet, præsertim in analysi tantillum versatus.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
 LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
 LIBRARY  
 1215 EAST 58TH STREET  
 CHICAGO, ILL. 60637  
 U.S.A.  
 TEL: 773-936-5000  
 FAX: 773-936-5000  
 E-MAIL: library@chicago.edu  
 WWW: www.library.chicago.edu  
 1999

# ARCHIMEDIS OPERA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè  
DEMONSTRATA.

---

*Per ISAACUM BARROW,*  
Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

---



LONDINI,  
Excudebat Guil. Godbid, vœneunt apud Robertum Scott,  
in vico Little-Britain. 1675.

AR OPHIMEDIS

# OPERA:

Metropolitan Opera House, New York

1875

THE METROPOLITAN OPERA HOUSE



in view of the fact that the  
Metropolitan Opera House, New York  
has been the scene of many  
of the most successful operatic  
performances of the season.

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

**A**Tqui eos spiritus Archimedes, eam altitudinem ingenii, tantâsque præceptorum divitias tenuit, ut quum per ea nomen atque opinionem sibi paravisset non humana sed divina scientiæ, nullum de his relinquere commentarium sustinuerit: verum illa in parandis machinamentis industria, atque adeo omni quæ ad usum se applicaret, & ad utilitatem, arte pro humili & sordida repudiata, in iis tantum posuerit studium suum, quæ præclara & eximia per se, neque ulli adstricta necessitati essent, non conferenda quidem cum aliis, sed quæ certamen excitent cum materia demonstrationi, quum illa mole & specie, exquisita hæc certitudine & vi excellat incredibili: neque enim implicationes in geometria & contortas magis quæstiones, in simplicioribus liquidioribusque conscriptas elementis invenias. Id dexteritati illius ingenij alij attribuunt: alij ad laborem referendum putant potius indefatigatum, quo quidvis eum efficere verisimile sit facile & citra sudorem potuisse. Nam si quæras, per te non invenias demonstrationem illius quæstionum: Ubi didiceris, potuisse putes te eam vel tua sponte invenire, adeo strata est via atque expedita, quæ ad id quod intendit demonstrare perducit. Quare non sunt rejicienda illa quæ de eo feruntur, à sua quadam & familiari Archimedem perpetuò demulcitum Sirene, & cibi oblivisci & corporis curam relinquere solitum: quumque raperetur subinde invitus ad ungendum corpus & ad balneum in foco figuras geometricas exarare: & dum ungeretur, ducere digito lineas, tanta illum dulcedine artis captum & revera inflammatum fuisse. Quum autem multa, & præclara invenisset, dicitur ab amicis & propinquis petisse ut vita defuncti cylindrum sphaeram complectentem sepulcro imponerent, inscriberentque proportionem, quatenus solidum continens excedat contentum. Atque is Archimedes quum esset, invictum se urbemque, quantum in ipso esset, præstitit.

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

**Τ**Ηλικόδον μὲν περὶ εὖνῃμα καὶ βλάβῃ φυγῆς, καὶ ποσὸν ἐκείνου δει-  
 γμάτων πλοῦτον Ἀρχιμήδης, ὥς ἐφ' οἷς ὄνομα καὶ δόξαν οὐκ ἀνθρα-  
 πίνης ἀλλὰ δαμονίου πρὸς ἔχῃ σωΐστας, μηδὲν ἐβελήσας σύγγραμμα,  
 περὶ τούτων ἀσολιτεῖν, ἀλλὰ πλὴν περὶ τὰ μηχανικὰ πραγμασίαν  
 καὶ πᾶσαν ὅπως τέχνῳ χρείας ἐρατομύθῳ, ἀβυρῇ καὶ βάλανον  
 ἡγεομένη, ἐκείνη καθάβδω μόνα πλὴν αὐτῷ φιλοπρίαν, οἷς  
 τὸ καλὸν καὶ σελήδον ἀμειγρὲς τῷ ἀνακρίτου σκόπῳ, ἀνύκρεια μὲν  
 ὄντα τοῖς ἄλλοις, εἶναι δὲ παρέχοντα σφὸς πλὴν ὕλῃ τῇ ἀποδείξει, ἥ μὲν  
 τὸ μέγεθος καὶ τὸ κάλλος, τῆς δὲ πλὴν ἀκρίβειας καὶ πλὴν δυνάμιν ὑπερφυῆ  
 παρεχόμενης. οὐ γὰρ ὅτι ἐν γεωμετρίας χαλεπωτέρας καὶ βαρυτέρας ὑπο-  
 θέσεις ἐν ἀπαιτήσεως λαβεῖν καὶ καθαρωτέρας συρρίξεις χαρομύθῳ. καὶ πρὸ  
 οἱ μὲν δι' αὐτὰ τῷ ἀνδρὶ σφοδρῶς ἐπὶ τῷ ὑπερβολῇ πνιπύνοτομιζουσιν,  
 ὑπὸντας πεπινμένῳ καὶ ῥαδίως ἔκαστον εὐκὸς γενέσθαι. ζῆτῶν μὲν γὰρ οὐκ  
 αὐτὸς δι' αὐτῶ πλὴν ἀνύκρεια, ἀλλὰ δὲ τῇ μαθητῇ σελήσας δόξα τῷ  
 καὶ αὐτὸν διέειν, οὕτω λείπει ἴδον ἀγρὴν καὶ ταχέως ἐπὶ τὸ δεικνύμενον, εὐ-  
 κωμ οὐδὲ ἀπιστῶν τοῖς σελὶ αὐτῷ λεγμένοις ὄν, ὥς ἔσθ' οἰκεία: δὴ πνῶ  
 καὶ σωοῖκου δελεσμένη αὐτὴ σφελῶ, ἐλέλησθαι καὶ σίπυ καὶ δεξαπίας σά-  
 ματῶ ἐξελίπεν. βία δὲ πολλὰς ἐλκόμην ἐσθ' ἀλεωμῶ καὶ λουτρῶν, ἐν  
 ταῖς ἐχάσαις ἔρραφιν χήματα ἥν γεωμετρικῶν, καὶ τῷ σώματι ἀλη-  
 λειομίνον διῆγε τῷ δακτύλῳ χαυμάς, ὑπὸ ἰσχυρῆς μεράλης κρηρῆς ὧν καὶ  
 μουσολιπῶ ἀλφῶς. πολλῶν δὲ καὶ καλῶν δόξεως γεγενῆς λίγεται ἥ  
 φίλων δεδιῶναι καὶ ἥ συγκρατῶν, ὅπως αὐτῷ μετὰ πλὴν τελούτῳ ὁσι-  
 σσιν τῷ τάφῳ πλὴν σελήσας ὄντας πλὴν κολινδρῶν ὁσι-  
 λαντῶ τὸ λόγον τὸ ὑπερφυῆ τῷ σελήσας σφελῶ πρὸς τὸ σελήσας  
 Ἀρχιμήδης μὲν ἐν τοσούτῳ χρομύθῳ ἀήτηπεν εἰαίνε πλὴν καὶ πλὴν πλὴν  
 ἴσον ἐφ' ἑαυτῷ διεφύλαξεν.

ARCHI-



# ARCHIMEDIS

## DE SPHÆRA & CYLINDRO

### LIBER PRIMUS.

*Archimedes Dofuheo Salutem.*

**A**Ntea quidem miſi quæ contemplando invenimus, ipſorum adſcribentēs Demonſtrationes; veluti quòd omnis portio comprehenſa ſub recta linea, & re-ctanguli Coni ſeſquitertia eſt trianguli habentis eandem baſim ac portio, equalemque altitudinem. Jam quorundam incidentium Theorematum elaboravimus Demonſtrationes, quæ ſunt huiusmodi. Primò quidem quòd Sphære ſuperficies quadrupla ſit maximi circuli eorum qui in ipſa ſunt. Secundum verò quòd cuiuſque portionis ſphæ-  
re ſuperficie equalis eſt circulus, cuius radius æquatur rectæ à vertice portionis ductæ ad peripheriam circuli, qui baſis eſt portionis: adhæc, quòd omnis ſphære cylindrus, baſim quidem habens eandem maximo, eorum qui in ſphæra ſunt, circulo, altitudinem verò parem diametro ſphære, cùm ipſe ſphære ſeſquialter ſit, tum ſuperficies ejus ſuperficie ſphære ſeſquialtera. Hæc quidem natura præceſſerant circa dictas figuras demonſtranda, nec tamen ab iis, qui ante nos Geometriæ incubuerunt animadverſa ſunt; ut intelliget quiſquis circa has figuras propoſita theoremata cum demonſtrationibus contulerit. \* Sicut & recepta multa eorum, quæ Eudoxus circa Solida ſpeculatus eſt; veluti quòd omnis pyramis tertia pars eſt priſmatis baſim habentis eandem cum pyra-

B

*Peſſimè depravatus locus: lego, ταῦτα ὑπὸ τῆς φούρας πρὸς τῆς εἰρημίας καὶ ἀρχήματα ἢ μὲν ἢ γέροντες ὑπὸ τῶν περὶ ἡμῶν πρὸς γεωμετρίας ἀνεσκημμένων τῶν δεσφηνμένων, ἢ νοήσεων δὲ ἀντι-  
\* pro καὶ ἀπὸ λεγομένων.*

mide,

*mide, & parem altitudinem: quodque conus omnis subtriplus est Cylindri basin habentis eandem cum Cono, ac aequalem altitudinem: quippe cùm etiam hæc ex natura rei priùs inessent hisce figuris, etsi complures ante Eudoxum fuerant haud contemnendi Geometræ, contigit tamen ea ab omnibus ignorata fuisse, neque perspecta à quoquam. Licebit autem illis, qui poterint, circa hæc dispicere. Ex usu quidem fuisset & vellem hæc, adhuc superstite Conone, edita fuisse: hunc enim arbitramur imprimis idoneum fuisse hæc expendere, & appositam de iis sententiam proferre; bonum factum verò censentes etiam \* aliis Mathematicum studiosis & peritis impertire, mittimus tibi Demonstrationes adscribentes, de quibus fas erit iis, qui in Mathematicis versantur, dispicere. Vale.*

*Pro τὸ πάντων  
ἔειπαι lego ὑπο  
πάντων ἀφ' ὧν ἔει  
δαμ.*

*Pro τῆς γωνίας lego  
τῆς γωνίας.*

*Pro αὐτῶν lego  
ἄλλοις.*

**A**dscribuntur primò tam Axiomata quàm Adsumpta ad demonstrationes ipsorum.

### *Definitiones & Hypotheses.*

I. Sunt quædam in plano lineæ curvæ terminatæ, quæ illarum terminos conjungentium rectarum vel totæ, ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alteras.

### *Scholium.*

Lineæ curvæ (vel flexæ, καμπύλης γραμμῆς) nomine designatur non tantùm lineæ ubique continuæque curva, sed & quomodocunque inflexa; seu mixta è rectis & curvis, seu tota è rectis composita. Quomodo perimenter figuræ cujusvis rectilinearæ, vel ejus quæcunque pars angulum includens, est lineæ καμπύλη. Siquidem rectè *Eutocius*. Ἰστέον ὅτι καμπύληαι γραμμαὶ καὶ εἰ ἔχ' ἀπλῶς τὸς κορυφὰς ἢ κανονίαν, ἢ ἀκλαστικὴν ἐξέχουσιν ὅτι σωρίζονται, ἀλλὰ πᾶσαι ἐν ἐπιπέδῳ γραμμῶν παρὰ τὸ εὐθεῖαν καμπύλων ἵστανται, μὴ ἀντὶ γραμμῶν ἐν ἐπιπέδῳ τὸ ἐπὶ σὺν Σωαπτομένῳ, ὥστε καὶ ἐξ εὐθείων σύγκειται &c. Hujusmodi verò curvarum aliquas adsumit vel totas ad easdem rectarum, quæ terminos ipsarum connectunt, partes jacere, vel saltem nihil ad diversas situm habere. Sit exemplo peripheria circularis ABC, cujus terminos connectat recta AC, liquet totam lineam ABC supra rectam AC attolli ad partes B.



B. Sin accipiatur in chorda  $AC$  punctum  $D$ , lineæ mixtæ  $DABC$  pars quidem aliqua  $ABC$  versus partes.  $B$  supra  $CD$  (terminos  $D, C$  connectentem) jacet, alia pars  $AD$  secundum ipsam  $CD$  protractam ( $\kappa\alpha\tau' \alpha\upsilon\tau\omega$  in sequenti definitione, hoc est ita ut ei congruat) sita est, nulla verò pars infra  $CD$ , ad partes ipsi  $B$  contrarias, deprimitur.

II. Ad easdem verò partes cavam appello ejusmodi lineam, in qua \*sumptis utcumque duobus punctis, quæ iis interjacent rectæ vel omnes ad easdem lineæ partes cadunt, vel aliquæ quidem ad easdem, quædam verò secundum \*ipsam, sed ad diversas nulla. \*lego  $\alpha\upsilon$  (expletivum) pro  $\epsilon\alpha\upsilon$ .  
\*aut, supra ipsam.

Schol. Huic intelligendæ subobscuræ definitioni respiciatur & expendatur antecedentis huic præstructæ hypothesis explicatio; cui tantum adjiciam certum esse cavitatis in easdem partes continuatæ signum, si nulla recta lineam pluribus quam duobus punctis secet.

III. Haud absimiliter sunt quædam superficies terminatæ, non quidem ipsæ in plano, sed terminos \*habentes (suos) in plano; & plani in quo terminos habent, vel totæ ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alias \*lego  $\epsilon\chi\sigma\tau\alpha\iota$  pro  $\epsilon\chi\sigma\tau\epsilon\iota$ .

IV. In easdem verò cavas ejusmodi voco superficies, in quibus si duo sumantur puncta, quæ punctis interjacent rectæ vel omnes ad eandem superficiem partes cadunt, vel quædam ad easdem, quædam verò secundum illas, in diversas autem nulla.

Schol. Qui primas duas capit, has intelliget hypotheses nullo negotio.

V. *Sectorem verò solidum* appello, quando sphæram conus secat verticem habens ad centrum sphære, comprehensam figuram tum à conici superficie, tum à superficie sphære intra conum.

Ut si  $BAC$  sit conus, cujus vertex  $A$  centrum sphære; figura  $DAE$  contenta superficie conicâ  $DAE$ , & sphæricâ superficie  $DE$ , erit sector solidus. Fig. 2.

Fit verò sector solidus  $DAE$  ex rotatu sectoris circularis  $DAZ$  circa radium  $AZ$ ; posito arcu  $DZ = ZE$ . unde aliter definiri possit. Nota, quòd detracto sectore  $DAE$ , residuum è sphæra  $DXE$  subinde  $\kappa\alpha\tau' \epsilon\chi\sigma\tau\epsilon\iota$  dicatur Sector sphæricus, hemispherio major. vid.

Schol. 51. hujus.

VI. *Rhombum verò solidum* voco, quando duo conici eandem basim habentes vertices habent ad utramque partem plani basis, ita ut ipsorum axes in directum jaceant, ab ambobus conis compositam figuram solidam.

Talis est figura  $BACD$  constans duobus conis  $BAC, BDC$ , quorum communis basis est circulus  $BC$ , & axis  $AD$  transiens per centrum  $E$ . Fig. 3.

# De Sphæra & Cyliandro. LIB. I.

Hæc autem adsumo.

## Axiomata.

I. Linearum eodæ terminos habentium minimam esse rectam.

II. Alias verò lineas si in eodem plano existentes eodæ terminos habeant, inæquales esse; quando scilicet ambæ ad eadæ partes cavæ sunt, & vel una tota comprehenditur ab altera, & à recta eodæ cum illa terminos habente, vel aliqua comprehenduntur, aliqua verò communia habet: & minorem esse illam quæ comprehenditur.

\* deleo *ἐμπὰς*  
vitas.

Fig. 4.

Sint exemplo lineæ  $ACB$ ,  $ADEB$ , hisce conditionibus præditæ; quod nempe sunt in eodem plano, & eodæ terminos  $A, B$  habent, & ad eadæ partes cavæ sunt; &  $ACB$  tota comprehenditur ab  $ADEB$  & recta  $AB$ , erit  $ACB$  minor quam  $ADEB$ . Item, linea mixta  $ZACB$  minor est lineâ  $ZADEB$ , quia  $ZA$  communis est, & reliqua  $ACB$  comprehenditur ab  $ADEB$ , ut prius.

Hoc pronunciatum ab Editoribus hætenus acceptum est pessimè; in duo quippe diserpunt, unum veritate, alterum & sensu cassum. Vide *Rivaltum*, & *Stupe*.

III. Similiter & superficie eodæ terminos habentium, si in plano terminos habeant, minorem esse quæ plana est.

IV. Alias verò superficies etiam eodæ terminos habentes, si in plano sint termini, inæquales esse, modò sint ambæ ad eadæ partes cavæ, & vel una superficies tota comprehenditur ab altera, & a superficie eodæ cum ipsa terminos habente, vel aliquæ (partes) comprehenduntur, aliquas vero communes habet: & maiorem esse illam, quæ comprehenditur.

Itidem & hoc Axioma perquam ineptè & absurdè dispertitur in duo. Cæterum si secundum probè perceperis, etiam hoc faciliè assequeris. Lucem fœnerabunt quæ infra sæpius occurrent Exempla.

\* lego *μείζων*  
pro *μικρά*.

\* vel sibi homogeneum; vel eorum quæ comparari possunt.

\* vel IV.

V. Quinetiam inæqualium linearum & inæqualium superficialium, ac inæqualium solidorum \* majus excedere minus eo quod sibi (aliquoties) adjunctum superare possit designatum quodvis \* ad se rationem habens.

Ut si linea  $AC$  lineam  $AB$  exsuperet lineâ  $BC$ , linea  $BC$  toties accipi potest (seu taliter multiplicari) ut quamvis lineam (puta  $ZC$ ) excedat. Sequitur ex \* def. V. Elementi V.

Hisce suppositis,

Prop.

## \* Prop. I.

\* Perperam  
vulgo pronun-  
ciatis accensetur.

Si circulo (A D F) inscribatur polygonum (A B C D E F) liquet inscripti polygoni perimetrum minorem esse circuli peripheriâ.

Fig. 5.  
2 ax. hujus.

Nam singulum latus, ut A B, minus est arcu (A B) quem subten-  
dit; & consequenter simul omnia latera arcubus simul omnibus mi-  
nora sunt, hoc est tota perimeter polygoni totâ circuli peripheriâ.

Coroll. 1. Eâdem planè ratione quomodocunque diviso arcu  
quolibet (A D) & ductis subten-  
sis (A B, B C, C D); totus arcus  
omnibus subten-  
sis major est.

Coroll. 2. Sinus rectus arcu suo minor est, hoc est à centro Z  
ductâ Z Y X ad A B perpendiculari, est A Y  $\supset$  arc A X.

Nam A Y B (2 A Y)  $\supset$  A X B (2 A X).

## Prop. II.

Si circa circumlunum (A B C D E) describatur polygonum (M N O P Q), Fig. 6.  
polygoni circumscripti perimeter circuli perimetro major erit.

Nam linea composita A M + B M major est arcu A B, & B N + C N major arcu B C; ac ita de cæteris: quare tota circumscriptæ  
figuræ perimeter, totâ circuli peripheriâ major est.

Coroll. 1. Simili ratione quomodocunque diviso arcu quovis, cir-  
cumductæ tangentes arcu toto majores sunt.

Coroll. 2. Tangens arcu suo major est, nempe ductis Z A, Z M,  
est A M  $\supset$  A Y. Nam A M + B M (2 A M)  $\supset$  A Y B (2 A Y).

## Prop. III.

Datis duabus magnitudinibus inequalibus (A, B), possibile est duas Fig. 7.  
rectas inequales invenire, ita ut maj r recta ad minorem habeat mino-  
rem rationem, quàm major magnitudo (A) ad minorem (B).

Multiplisetur A—B, per numerum aliquem (puta N) donec pro-  
ducta magnitudo, quam voco X, exsuperet B. tum assumptâ quavis  
rectâ R, sit R. S :: 1. N :: A—B. X. Dico R + S, & S esse lineas  
quæsitæ. Nam ob B  $\supset$  X, erit A—B. B  $\supset$  (A—B. X ::) R. S.  
unde componendo erit A. B  $\supset$  R + S. S: Q. E. F.

Prop.

## Prop. IV.

Fig. 8.

9.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus (A, B) & circulo (CDEF), posito circulo polygonum inscribi, aliudque circumscribi, ita ut circumscripti latus ad latus inscripti minorem habeat rationem, quàm magnitudo major (A) ad minorem (B).

a 3 hujus.  
b 1. 10. et.

²Fiat O P. O Q. : A. B. & descripto super O P semicirculo adaptetur O Q, & jungatur P Q. tum <sup>b</sup> bisecetur circumferentia C D E F, & ejus semissis D C F, & hujus semissis C D, ac ita continuo, donec angulus D G K, semissis anguli D G H sit æqualis angulo P O R  $\Rightarrow$  ang P O Q. perque K ducatur tangens L M occurrens radiis G D, G H protractis in L, M; tum jungatur D H. à bisectione liquet rectam L M latus esse polygoni circulo circumscriptibilis, & D H latus polygoni inscriptibilis. Jam ob angulos D G N, R O Q <sup>c</sup> pares, & angulos G N D, O Q R rectos, erunt trigona D G N, R O Q similia. quare G D (G K). G N :: O R. O Q  $\Rightarrow$  O P. O Q atqui G K. G N :: L K. D N :: L M. D H. ergo L M. D H  $\Rightarrow$  (O P. O Q  $\Rightarrow$ ) A. B. Q. E. F

c const.

4. 6. & 3. 5.  
15. 5.

## Prop. V.

Rursus si fuerint due magnitudines inæquales, & sector potest circa sectorem polygonum describi, & aliud inscribi, ut latus circumscripti ad inscripti latus minorem habet rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

Eodem planè modo conficitur, quo antecedens.

## Prop. VI.

Fig. 10.

11.

Dato circulo (G) binisque magnitudinibus inæqualibus (A, B), circulo polygonum circumscribere, & aliud inscribere, ita ut circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem, quàm major magnitudo (A) ad minorem (B).

a 3 hujus.  
b 13. 6.  
c 4 hujus.

d cor. 20. 6.

²Fiat linea X. Z  $\Rightarrow$  A. B; & inter X ac Z reperiaturs media proportionalis Y; <sup>c</sup> tum circulo dato inscribatur polygonum, aliudque circumscribatur, ita ut hujus latus L M ad illius latus D H minorem habeat rationem, quàm X ad Y. Dico factum. Nam ratio L M ad D H duplicata <sup>d</sup> (hoc est ratio figuræ circumscriptæ ad inscriptam) minor

minor est ratione X ad Y duplicatâ, hoc est ratione X ad Z; quæ minor est ratione A ad B. ergo factum. *const.*

Corollarium. Prop. VII.

Quin similiter demonstremus, quòd duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & sectore, possit circa sectorem polygonum describi, & aliud ei simile inscribi, ita ut circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habeat, quàm major magnitudo ad minorem.

Lemma. Prop. VIII.

Manifestum & hoc, quòd, si detur circulus vel sector, & spatium aliquod, possint circulo vel sectori polygona æquilatera inscribendo, & adhuc continuo reliquis segmentis, superesse quædam segmenta circuli vel sectoris, quæ minora sint proposito spatio.

\* Hæc enim tradita sunt. in Elementis.

\* *vid. 2. 12.*

Prop. IX.

Est autem demonstrandum quòd & circulo dato (vel sector) (A) & spatio (B) possit circumscribi polygonum circulo (vel sectori), ita ut reliqua à circumscriptiōe segmenta minora sint dato spatio. *\* hoc est excessus polygoni supra circuml.*

\* Circulo figura circumscribatur, quam voca C; & alia inscribatur, quæ vocetur I, sic ut C. I  $\supset$  A  $\supset$  B. A. Dico factum. Nam ob A  $\supset$  I;  $\supset$  erit C. A  $\supset$  (C. I  $\supset$ ) A  $\supset$  B. A. unde dividendo C — A. A  $\supset$  B. A.  $\supset$  adeoque C — A  $\supset$  B. ergo factum. *a 6 hujus. b 9. ax. 1. c 8. 5. d const. e 10. 5.*

Prop. X.

Si cono Isoceles (V A X B Y C Z) inscribatur pyramis (V A B C) æquilateram habens basim (A B C), superficies ejus, exceptâ base, æquatur triangulo (M N O), habenti quidem basim (N O) æqualem perimetro basis (A B C), altitudinem verò (M N) perpendiculari (V D) demissa à vertice (V) ad basim unum latus (A B). *Fig. 12. 13.*

Nam ducantur V E, V F etiam lateribus B C, C A perpendiculares, & quia triangula A V B, B V C, C V A sibi mutuò æquilatera sunt, erunt perpendiculares V D, V E, V F inter se pares. ergo triangulum, cujus basis æquatur ipsis A B, B C, C A simul acceptis, & altitudo *a hypoth.*

**a** 38. r. altitudo uni perpendicularium  $VD$ , <sup>b</sup> æquatur triangulis  $AVB +$   
**c** *conf. & hyp.*  $BVC + CVA$ ; <sup>c</sup> hoc est triangulum  $MNO$  æquatur superficiei  
 pyramidis exceptâ base. *Q. E. D.*

## Prop. XI.

**Fig. 14.** Si circa conum *Isofelem* ( $VD EF$ ) describatur pyramis ( $VABC$ ),  
 superficies pyramidis demptâ base, æquatur triangulo, habenti basin  
 æqualem perimetro basis  $ABC$ , altitudinem verò conî lateri ( $VD$ ).

**a** 18. def. 11. Sit  $VZ$  axis conî, & à centro  $Z$  ad contactum  $D$  ducatur recta  $ZD$ ;  
**b** 18. 11. & ob  $VZ$  <sup>a</sup> rectam plano  $ABC$ , etiam triangulum  $VZD$  plano  
**c** 18. 3.  $ABC$  <sup>b</sup> rectum est: at verò tangens  $AD$  <sup>c</sup> perpendicularis est ipsi  
**d** 4. def. 11.  $ZD$  (communi sectioni planorum  $VZD, ABC$ ) <sup>d</sup> ergo  $AD$  per-  
**e** 3. def. 11. pendicularis est plano  $VZD$ , & <sup>e</sup> consequenter lineæ  $VD$ ; ergo  $VD$   
 (conî latus) est altitudo trianguli  $VAB$ . Eâdemque ratione conî la-  
 tus est altitudo trianguli  $VAC$ , & omnium, quibus constat lateratis  
 conî superficies. <sup>f</sup> ergo triangulum, cujus basis est  $AB + BC +$   
**f** 38. r.  $CA$ , altitudo latus conî, <sup>f</sup> æquatur triangulis conî superficiem con-  
 stituentibus. *Q. E. D.*

## Prop. XII.

**Fig. 15.** Si in conî *Isofelis* ( $VAB$ ) circum ( $ABCD$ ) qui basis est conî  
 incideris recta ( $CD$ ) ab ejus autem terminis ducantur rectæ ( $CV,$   
 $DV$ ) ad conî verticem ( $V$ ); triangulum ( $CVD$ ) ab incidente & ad  
 verticem ductis comprehensum, minus est conî superficie ( $CAVBD$ )  
 ductis ad verticem interceptâ.

Bisecetur arcus  $CABD$  in  $E$ , & ducantur rectæ  $CE, DE, VE$ .  
**a** 1. 6. liquetque triang  $CVE + DVE$  <sup>a</sup>  $\ll$   $CVD$ ; quia  $CE + DE$   
**b** 20. r. <sup>b</sup>  $\ll$   $CD$ , & altitudo communis est: sit excessus  $X$ , primò (suppone)  
 non minor segmentis  $CE, DE$ : & quia superficies conica  $CVE +$   
**c** 3. ax. huj. segm.  $CE$  <sup>c</sup> major est incluso triangulo  $CVE$  (communis enim ter-  
 minus est subtensa  $CE$ ); & similiter conica superficies  $DVE +$   
 segm.  $DE$   $\ll$  triang  $DVE$ , erit conjunctè conica superf.  $CVD +$   
 segmenta  $CE, DE$   $\ll$  triang  $CVE + DVE$ ; magisque conica su-  
**d** *hyp.* perf.  $CVD + X$   $\ll$  triang  $CVE + DVE$  <sup>d</sup>  $=$  triang  $CVD +$   
 $X$ . unde sublato communi  $X$ , erit con. superf.  $CVD$   $\ll$  triang  $CVD$ .  
 Sin  $X$  minor sit segmentis  $CE, DE$  bisecentur arcus  $CE, DE$ , &  
**e** 8. hujus. ipsorum semisses, <sup>e</sup> donec residua segmenta  $CA, AE, DB, BE$  mi-  
 nora

nora sint excessu X. tuncque ductis rectis AC, AE, AV; BD, BE, BV; ° erit ut prius, con. superf. CVA + segm CA ⊂ triang CVA. & con. superf. AVE + segm AE ⊂ triang AVE; adeoque conjunctæ con. superf. CVE + segm. CA, AE ⊂ triang CVA + AVE; ⊂ triang CVE. Simili ratione con. superf. DVE + segm. DB, BE ⊂ triang DVE; conjunctæque con. superficies CAVB + segm. CA, AE, DB, BE ⊂ triang CVE + DVE = triang CVD + X. Unde cum segm. CA + AE + DB + BE = X, erit con. superf. CAVBD ⊂ triang CVD. Q.E.D.

Ita t̄ d̄negitas ergo rem ex se satis claram demonstrat Archimedes, ut & tres sequentes non minus αὐτοαἰσῆς & αὐτομάτης: nimirum abhorret is à multiplicandis extra necessitatem axiomatis & postulatis.

Prop. XIII.

*Si ducantur rectæ (AC, BC) tangentes circum (ADBY) qui basis est coni (VADB) in eodem quo circulus existens plano, & sibi met occurrentes; à contactibus vero (A, B) & ab oecursu (C) ad coni verticem (V) ducantur rectæ (AV, BV, CV); triangula (AVC, BVC) à tangentibus & ad coni verticem adjunctis (comprehensa) majora sunt coni superficie absumptâ ab ipsis.* Fig. 16.

Bisecetur arcus AB in D, & per D ducatur tangens EF, & connectantur VE, VF; ° estque EC + FC ⊂ EF; quare addito a 20. 1. communi AE + BF, erit AC + BC ⊂ AE + EF + BF. b 1. 6. proinde triang AVC + BVC ⊂ triang AVE + BVF + EVF (quandoquidem communis est horum triangulorum altitudo). Sit excessus X, non minor segmentis AED, BFD: jam quia pyramidica superficies EAVBF, cujus basis est trapezium EABF, ° major c 4. ax. huj est inclusa conicâ superficie AVB, cum segmento ADB (communi existente termino perimetro trianguli AVB); & subtrahendo commune segmentum ADB triangula AVE, EVF, BVF cum segmentis AED, BFD majora sunt conicâ superficie AVBD: magis igitur triangula AVE, EVF, BVF cum X majora sunt eâdem d hyp. superficie; ° hoc est triang AVC + BVC ⊂ con. superf. AVBD. Sin X minor sit segmentis AED, BFD, bisecetur arcus AD, BD, & ipsorum semisses, ac ita continuo ° donec residua segmenta ALG, e 9 hujus. GKG, DMH, HNB minora evaserint quam X, & ductis rectis VL, VK, VM, VN similiter procedet demonstratio ac in præcedenti.

## Prop. XIV.

Fig. 17.

*Si in superficie recti cylindri (ACDB) sint due rectæ (AC, BD), cylindri superficies (ACFDBFA) rectis intercepta, major est parallelogrammo (ACDB) comprehenso rectis (AC, BD) in superficie cylindri, & illis (AB, CD) quæ terminos ipsarum conjungunt.*

a 20. I.

b 1 6.

c 4 ax. hujus.

d hujus.

e 8 hujus.

constr.

Bifecentur arcus AB, CD in E, F; & ducantur AE, BE, CF, DF; & ob AE + EB<sup>a</sup> = AB, b erit pgr. AEF C + BEFD = pgr. ABCD (existente pari omnium altitudine): sit X excessus non minor primò segmentis AE, BE, CF, DF; jam cylindrica superficies AEBDFC + segm. AEB, CFD<sup>c</sup> = pgr. AEF C, BEFD + triang. AEB, CFD (communi existente termino parallelogrammo ABCD) ergo subtrahendo commune triang. AEB + CFD, erit cylindrica superf. AEBDFC + segment. AEB, BE, CF, DF = pgr. AEF C + BEFD<sup>d</sup> = pgr. ABCD + X. quare cum X sit æqualis, aut minor segmentis istis, liquet cylindricam superficiem AEBDFC majorem esse pgr. ABCD.

Sin X segmentis istis minor sit, bifecentur arcus AE, BE, CF, DF, & ipsorum semisses, e donec residua segmenta AG, GE, EH, HB; CL, LF, FM, MD minora sint ipso X: tum ductis rectis, ut in figura, erit (ut prius) { pgr. AGLC + GEFL = pgr. AEF C. pgr. BHMD + HEFM = pgr. BEFD. Et quia Cylindrica superi. AEBDFC + segm. AEB, CFD = pgr. AGLC, GEFL, BHMD, HEFM + rectilin. fig. AGEHB, CLFMD (communi existente termino parallelogrammo ABCD) ergo, subtrahctis communibus istis figuris rectilineis, cylindrica superf. AEBDFC + segm. AG, GE, EH &c. = pgr. AGLC, GEFL, BHMD, HEFM = pgr. AEF C + BEFD = pgr. ABCD + X. Unde cum X segmentis istis major sit, liquido patet cylindricam superficiem AEBDFC majorem esse parallelogrammo ABCD. Q.E.D.

## Prop. XV.

Fig 18.

*Si in superficie recti cujusdam cylindri sint due rectæ (AC, BD) à terminis verò rectarum ducantur quadam (AE, BE & CF, DF) tangentes circulos, qui bases sunt cylindri, in eodem existent s plano, & concurrentes; parallelogramma (AEFC, BEFD) comprehensa subtangentibus & lateribus cylindri, majora erunt cylindri superficie, interceptâ rectis (AC, BD) quæ sunt in superficie cylindri.*



Bifecentur arcus AG in B, & ducatur tangens KGL; & erigantur KM, LN parallelæ axi cylindri, & connectatur MN: & liquet esse pgr. A E F C + B E F D  $\sqsubset$  pgr. AKMC + K L N M + B L N D (quia, ut priùs, A E + B E  $\sqsubset$  AK + KL + B L). a in 13 *bujus*. Sit excessus X, non minor primò segmentis AKG, B L G, C M H, D N H. Et quia superficies composita ex parallelogrammjs AKMC, K L N M, B L N D & trapezii A B L K, C D N M  $\sqsubset$  cylind su- b 4 ax. *buj.* perf. AGBDHC + segm. AG B, C H D (communi existente termino parallelogrammo A B D C) erunt, subtractis communibus segmentis AG B, C H D, residua pgr. AKMC. K L N M, B L N D + segm. AKG, B L G, C M H, D H N  $\sqsubset$  cylindrica superfic. AGBDHC. quare magis pgr. AKMC, K L N M, B L N D + X (hoc est pgr. A E F C, B D F G)  $\sqsubset$  cylind superf. AGBDHC. c b p.

Q. E. D.

Sin X minor sit dictis segmentis, bifecentur arcus AG, BG, du- d 9 *buj.* canturque tangentes, usque dum segmenta fiant minora quàm X; & simili tenore quo priùs demonstratio progredietur.

Corollaria.

Hisce verò demonstratis, è prædictis liquet,

1. Quòd si cono Ilosceli pyramis inscribatur, pyramidis superficies, exclusâ basi, minor est superficie coni, demptâ quoque basi.

Nam singula pyramidem continentia triangula sunt minora singulis 12 *bujus*. superficiebus conicis, quas interceptant & subtendunt. ergo illa simul his simul minora sunt, hoc est superficies pyramidis superficie coni.

2. Et quòd si cono Ilosceli pyramis circumscribatur, superficies 13 *bujus*. pyramidis, exceptâ basi, major est superficie coni, basi quoque seclusâ.

3. Item apparet ex ostensis, quòd si cylindro recto prisma inscribatur, prismatis superficies è parallelogrammjs composita minor est superficie cylindri, sine basi.

Minus enim est singulum prismatis parallelogrammum superficie 14 *bujus*. cylindricâ, quam abscindit.

4. Et quòd si cylindro recto prisma circumscribatur, prismatis 15 *bujus*. superficies, parallelogrammjs constans, major est superficie cylindri, sepositâ basi.

Haftenus ad sequentes demonstrationes utilia lemmata præstravit; ad principalia jam progreditur Theoremata.

## Prop. XV I.

Fig. 19.  
20.

Omnis cylindri recti superficies (S), exclusâ basi, æqualis est circulo, cujus radius (A) proportionè mediâ est inter cylindri latus (L), & basîs diametrum (2R).

Si neget, esto primum  $S \neq \odot A$ ; & circa circumulum A describatur figura (quæ vocetur C), & inscribatur similis altera (quæ dicatur I) ita ut  $C.I \supset S. \odot A$ . tum cylindri basi circumscripta concipiatur figura similis ipsi C, quæ nominetur K: ejusque perimetor dicatur P. Jam ob 2R.  $A^b :: (A.L^c ::) 2A. 2L$ ; vel antecedentes dimidiando  $R. A :: A. 2L$  erit  $Rq. Aq. (hoc est K. C) :: R. 2L^c :: \frac{R}{2}. L :: \frac{RP}{2}$ .

$LP$ ; ergo cum sitq;  $K = \frac{RP}{2}$ , erit  $C = LP$ .  $^k$  ergo  $LP. I \supset S. \odot A$ . atqui  $LP. \odot A. ^1 \supset LP. I$ . ergo magis  $LP. \odot A \supset S. \odot A$ .  $^m$  unde  $LP \supset S$ . hoc est superficies prismatis superscripti minor est superficie cylindri, contra 4 Coroll. præcedentis. ergo non est  $S \neq \odot A$ .

Sin dicatur  $S \supset \odot A$ , fiat  $C.I \supset \odot A. S$ . & inscripta concipiatur basi cylindri figura similis ipsi I, quæ dicatur Y, ejusque perimetor P. tum ob  $Y. I :: ^c Rq. Aq^m :: \frac{RP}{2}. LP$ ; &  $Y^b \supset \frac{RP}{2}$ , erit  $I \supset LP$ . Verum  $C.I^b \supset \odot A. S^1 \supset C.S$ .  $^m$  adeoque  $S \supset I$ . ergo magis  $S \supset LP$ . hoc est superficies cylindri minor est inscripti prismatis superficie, contra 3. coroll præcedentis. ergo non est  $S \supset A$ . Superest igitur, ut sit  $S = \odot A$ . Q. E. D.

## Corollaria.

1. Cylindricæ superficies super æqualibus basibus constitutæ se habent ut latera, vel altitudines.
2. Cylindricæ superficies æquè altæ se habent ut diametri basium.
3. Cylindrica superficies rationem habent compositam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes cylindricæ superficies rationem habent laterum, vel diametrorum duplicatam.
5. Æqualium superficierum cylindricarum latera & diametri proportionè recipiuntur; & conversè, si recipiuntur hæc proportionè, istæ sunt æquales.

Cum

Cum enim cylindricæ superficies se habeant ut circuli, quibus æquantur; & circuli ut quadrata radiorum; & hæc quadrata æquantur reſtāngulis ex latere & diametro cylindrorum; & iſta reſtāngula dictas habeant paſſiones (ut in elementis oſtenditur) ergo hæc patent.

## Prop. XVII.

*Omnis coni Iſoſcelis ſuperficies (S) abſque baſi æquatur circulo, cuius radius (A) mediam habet proportionem inter coni latus (L) & baſis circularis radium (R).* Fig. 21.

Si neges, ſit primò  $S \neq \odot A$ : & circulo A circumſcribatur figura C, & inſcribatur altera I ſic ut C. I ::  $\odot S. \odot A$ ; tum baſi coni circumſcribatur quoque figura ſimilis ipſi C, quæ vocetur K, ejuſque ſemi-perimeter appelletur P. Jam quia  $R. A^b :: A. L.^c$  erit  $Rq. Aq. d$  (id eſt K. C) ::  $R. L.^e R. P. L. P.$ ; ergo quum ſit  $K' = R. P.$  erit  $C = e$  1. 6.  $L. P. s$  quare  $L. P. I \rightarrow S. \odot A.$  ſed  $L. P. \odot A \rightarrow L. P. I.$  ergo magis  $L. P. \odot A \rightarrow S. \odot A.$  unde  $L. P. \rightarrow S.$  hoc eſt ſuperficies pyramidis cono circumſcriptæ conicæ ſuperficie minor eſt, contra prius oſtenſa, in 2. coroll. 15 hujus.

Sed ſecundò ſit  $S \rightarrow \odot A.$  fiatque C. I  $\rightarrow \odot A. S.$  & coni baſi inſcribatur figura Y, ſimilis ipſi I, cujuſ ſemi-perimeter appelletur  $\omega$ . Jam  $Y. I^d :: Rq. Aq. e :: R. L. :: R. \omega. L. \omega.$  &  $*Y \rightarrow R. \omega.$  unde  $I^f \rightarrow L. \omega.$  atqui C. I.  $\rightarrow \odot A. S \rightarrow C. S.$  & conſequenter  $S^k \rightarrow I \rightarrow L. \omega.$  hoc eſt ſuperficies coni minor eſt ſuperficie pyramidis cono inſcriptæ, itidem contra demonſtrata, in 1. Coroll. 15. hujus.

## Corollaria.

1. Conicæ ſuperficies ad æquales Baſes poſitæ ſunt ut diametri baſium.
2. Conicæ ſuperficies æquè altæ, vel æqualia latera habentes ſunt ut diametri baſium.
3. Conicæ ſuperficies rationem habent compoſitam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes conicæ ſuperficies habent duplicatam laterum vel diametrorum rationem.
5. Æquales conicæ ſuperficies quoad latera & diametros proportionem reciprocantur; & converſe.

Prop.

## Prop. XVIII.

Fig. 22.

*Omnis conî Ifoscelis superficies (S) eandem ad basin rationem habet, quam conî latus (L) ad basis radium (R).*

a 1. 6.

b cor. 2. 12.

c 17 hujus.

Nam  $L.R^a :: (L.R. Rq^b :: \odot \text{ rad. } \sqrt{L.R.} \odot R. (\text{hoc est } ::) S.$   
 $\odot R. Q.E.D.$

## Prop. XIX.

Not. in hoc & sequentibus triangula conos representantia censentur per axes trajecta.

*Si conus Ifosceles (ABC) secetur plano (DQE) bas (BPC) parallelo, parallelis planis intercepta conî superficiei (DBCE) aquatur circulus, cujus radius (Z) mediam habet proportionem inter conî latus (DB) parallelis planis interjectum, & aequalem utrique radio (FB + GD) circulorum (BPC, DQE) qui in parallelis sunt planis.*

Fig. 23.

24.

a hyp.

b 17. 6.

c sch. 1. 2.

d 16. 6.

e 4. 6.

f cor. 2. 12.

g 17. hujus.

Fig. 25.

Nam ob  $DB.Z^a :: Z.BF + DG,^b$  erit  $Zq = DB \times BF + DG = AB - AD \times BF + DG^c = AB \times BF - AB + DG - AD \times BF - AD \times DG = AB \times BF - AD \times DG$  (est enim  $AB \times DG^d = AD \times BF$ , ob  $AB.BF^e :: AD.DG$ ).  $^f$  ergo  $\odot \text{ rad } Z = \odot \text{ rad } \sqrt{AB \times BF - AD \times DG}$  Verum  $\odot \text{ rad } \sqrt{AB \times BF}^g = \text{superf. } ABC$ ; &  $\odot \text{ rad } \sqrt{AD \times DG}^g = \text{superf. } ADE$ . ergo  $\odot \text{ rad } Z$  æquatur superficiei  $DBCE$ . *Quod E. D.*

*Coroll.* Hinc si recta  $YX$  bifecet latera  $DB, EC$ ; erit circulus radio  $\sqrt{DB \times YX}$  æqualis superficiei conicæ  $DBCE$ .

Nam ductis rectis  $YG, BE, FX$ ; ob  $DG = \frac{DE}{2}$ , &  $DY =$

$\frac{DB}{2}$ , erunt  $YG, BE$  parallelæ; ergo in pgr.  $GYUE$  est  $YV =$

$GE$ . Simili discursu est  $VX = BF$ . unde  $YX = GE + BF$ .

## Prop. XX.

Fig. 26.

*Si duo sint conî Ifosceles (BAC, XZ), & unius superficiei (BAC) æqualis sit alterius basi (Z); & quæ a basi centro (D) ad conî latus (AC) ducitur perpendicularis (DE) altitudini (X) æquetur; æquales erunt conî (BAC, XZ).*

Nam ductâ  $AD$ , ob  $X = DE$ , erit  $AD.X^b :: AD.DE^c :: AC.CD$  (sunt enim similia triangula rectangula  $ADE, ACD$ )  
 $^d :: \text{superf. } BAC$ . bas.  $BFC^e :: Z.bas. BFC^f :: AD.X$ . Itaque

cum

cùm reciprocetur proportione bases & altitudines conorum B A C, s 15. 12.  
Z X, ii sunt æquales. Q.E.D.

## Prop. XXI.

Omni Rhombo (G A H D) ex Isoscelibus conis (G A A, G D H) Fig. 27.  
composito, æquatur conus (X Z) habens quidem basin (Z) æqualem super- 28.  
ficiæ unius conis (G A H) eorum qui Rhombum continent, altitudinem  
verò (X) æqualem perpendiculari (D E) ductæ à vertice (D) alterius  
conis (G D H) ad prioris conis latus unum (A H).

Nam ob  $X^2 = D E$ , est  $A D . X^b :: A D . D^c E^c :: A H . K H^d ::$  su- a hyp.  
perf. G A H. bas. G L H  $:: Z .$  bas G L H. quare conus cujus altitu- b 7. 5.  
do æquatur rectæ A D, & basis circulo G L H æquatur cono X Z c 4. 6.  
(ob reciprocam nempe proportionem  $A D . X :: Z . G L H$ ). atqui d 18 hujus.  
conus altitudine A D, basis G L H æquatur Rhombo A G D H e hyp. & 7. 5.  
(nam con G D H. con G A H  $:: D K . A K$ ; & componendo Rhomb f 15. 12.  
A G D H. con G A H  $:: A D . A K^g ::$  con  $\left\{ \begin{array}{l} \text{alt } A D. \\ \text{bas } G L H. \end{array} \right.$  con G A H. g 14. 12.

ergo Rhombus A G D H æquatur cono X Z. Q.E.D. h 1. ax. I.

## Prop. XXII.

Si conus Isosceles (B A C) secetur plano (G H) basi (B C) paral- Fig. 29.  
lelo, à circulo verò factò (G H) describatur conus (G D H) verticem  
habens basis centrum (D): factus autem Rhombus (G A H D) aufe-  
ratur à toto cono (B A C); residuo æquatur conus (X Z), habens qui-  
dem basin (Z) æqualem superficiæ conica (G B C H) parallelis planis  
interceptæ; altitudinem verò (X) æqualem perpendiculari (D E) du-  
ctæ à basis centro (D) ad conis latus unum (A C).

Conus enim, cujus altitudo est D E, & basis æqualis superficiæ  
G B C H æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem a 11. 12.  
altitudinem D E, & bases æquales superficiæbus A B C, A G H, hoc  
est differentiæ conis A B C, & Rhombi A G D H (per duas præce-  
dentes). quare conus X Z isti differentiæ æquatur. Q.E.D.

Prop:

## Prop. XXXIII.

Fig. 30.

Si Rhombi (GAHD) ex Isoscelibus conis (GAH, GDH) compositi unus conus (AGH) secetur plano (MN) basi (GH) parallelo; à facto autem circulo (MN) describatur conus (MDN) habens verticem (D) eundem cum altero cono (GDH); ab integro vero Rhombi (GAHD) auferatur effectus Rhombus (MAND), residuo æquatur conus (XZ) habens quidem basin (Z) æqualem conicæ superficiei (MGHN) parallelis planis (MN, GH) interceptæ, altitudinem vero (X) perpendiculari (DE) ductæ à vertice (D) alterius conici (GDH) ad latus (AH) reliqui conici (GAH).

11. 12.

Conus enim, cuius altitudo æqualis est ipsi DE & basis superficiei conicæ MGHN, æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem (DE), ac bases æquales superficiibus conicis AGH, AMN, \*id est differentiæ Rhomborum AGDH, AMDN. ergo conus XZ isti differentiæ exæquatur. Q.E.D.

\* 21 huius.

## Prop. XXXIV.

Fig. 31.

\* ἀπὸ πλάτους.

Si circulo (ABCD) inscribatur polygonum \* parilaterum simul ac æquilaterum (AEBFCGDH), & agantur rectæ (EH, BD, FG) polygoni latera conjungentes, quæ parallelæ sint uni cuivis (EH) duo polygoni latera subtendentium, omnes conjunctæ (EH + BD + FG) ad circuli diametrum (AC) illam rationem habent, quam habet dimidia præter unum subtendens (CE) ad polygoni latus (AE).

a 27. 3.

b 4. 6.

c 12. 5.

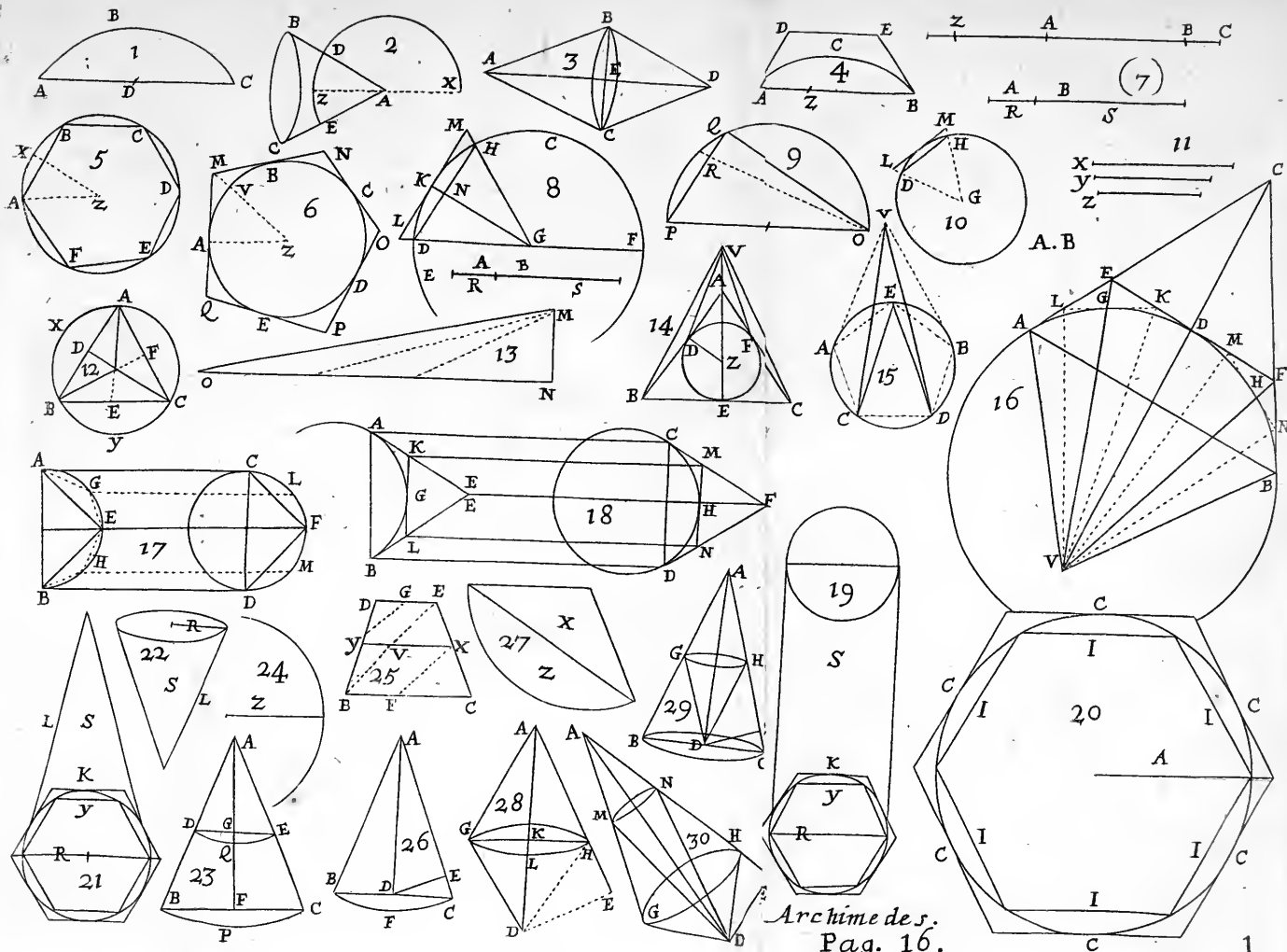
Ducantur enim rectæ HB, DF. Et quoniam anguli ACE, AEH, EHB, HBD, BDF, DFG, FGC, æqualibus insistentes arcubus, æquales sunt, liquet triangula rectangula CEA, EIA, HIK, BLK, DLM, FNM, GNC esse similia; b adeoque esse CE, EA :: EI, IA :: HI, IK :: BL, LK :: DL, LM :: FN, NM :: GN, NC. cquare ut CE ad EA, sic antecedentes conjunctim EH + BD + FG ad consequentes simul, hoc est ad totam diametrum AC: Q.E.D.

Coroll.

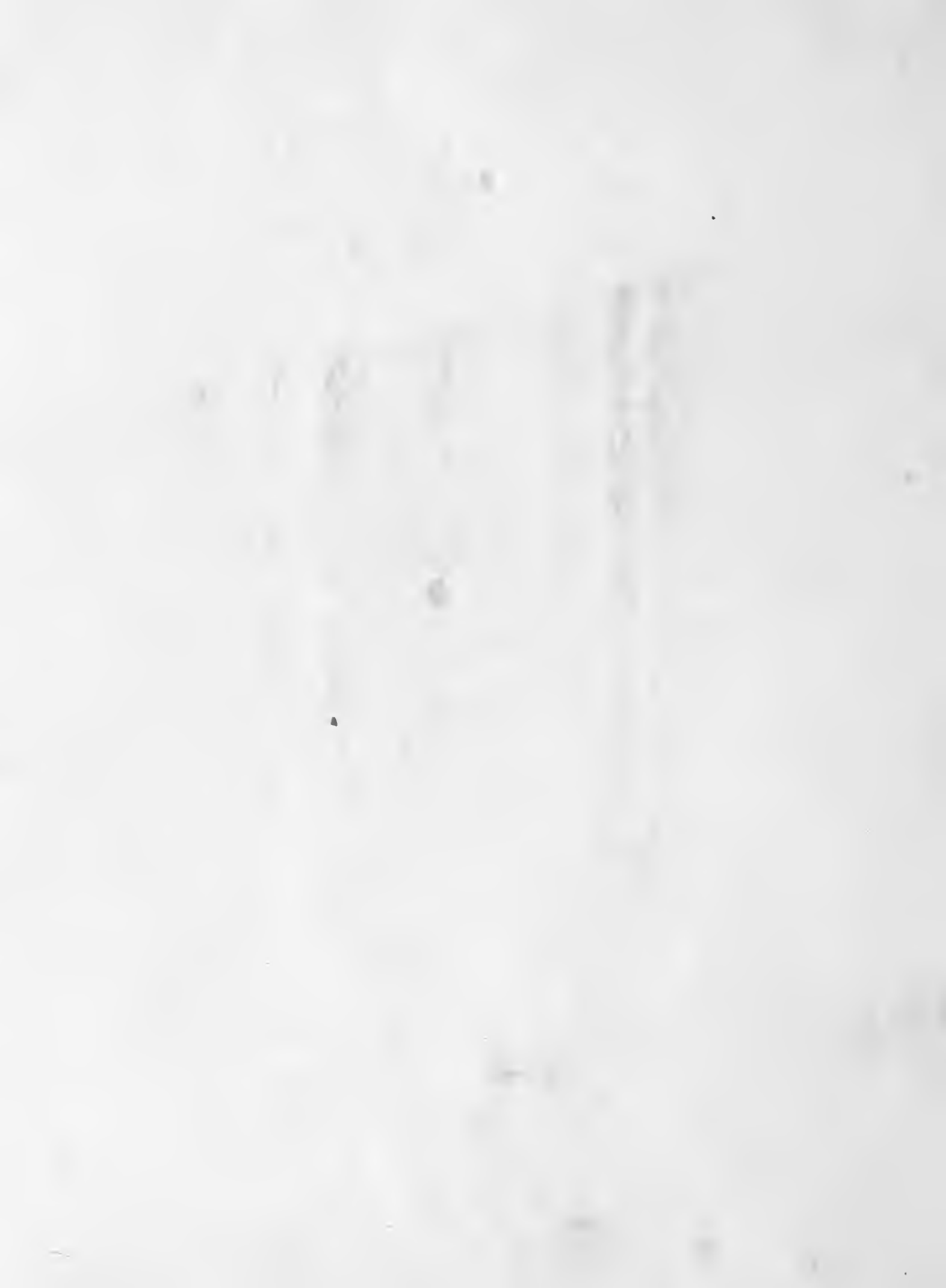
16. 6.

$$CE \cdot AC = EA \times EH + BD + FG.$$

Prop.



Archimedes.  
Pag. 16.





## Prop. XXV.

Si circuli segmento (FAG) inscribatur polygonum (FBEAHDG) Fig. 31.  
 latera habens, exceptâ base, aequalia, & numero paria; ducantur ve-  
 rò rectæ (EH, BD) parallele basi, connectentes latera polygoni, omnes  
 ductæ cum dimidia base (EH + BD + FN) ad segmenti altitudi-  
 nem (AN) eandem habent rationem, quam habet illa (CE), quæ à  
 diametro circuli ad polygoni latus ducitur, ad polygoni latus (AE).

Nam, prorsus ut in præcedenti, est CE. EA :: EI. AI :: HI. IK  
 :: BL. LK :: DL. LM :: FN. MN :: EH + BD + FN. AN <sup>12. 5.</sup>  
 :: CE. EA. *Q.E.D.* <sup>16. 6.</sup>

Coroll. \*AN \* CE = EA \* : EH + BD + FN.

## Prop. XXVI.

Sit in sphæra maximus circulus ABGD, eique inscribatur poly- Fig. 32.  
 gonum æquilaterum, multitudo autem laterum ipsius mensuretur à  
 quaternario; sint verò AG, BD diametri: quòd si manente diame-  
 tro AG circumvolvatur circulus ABGD, polygonum continens;  
 liquet quòd peripheria ejus secundùm sphæræ superficiem feretur.  
 Anguli verò polygoni, præter eos qui ad puncta A, G secundùm pe-  
 ripherias ferentur circulorum in sphæræ superficie descriptorum, &  
 rectorum circulo AGBD. Diametri autem ipsorum erunt rectæ po-  
 lygoni angulos conjungentes, ad BD parallæ. Ast polygoni late-  
 ra secundùm conos quosdam ferentur; nempe AZ, AN secundùm  
 superficiem coni, cujus quidem basis erit circulus circa diametrum  
 ZN, vertex autem punctum A. Sed HZ, MN secundùm superfici-  
 em quandam conicam ferentur, cujus quidem basis est circulus circa  
 diametrum HM, vertex verò punctum, in quo occurrent productæ  
 HZ, MN sibi mutuò & ipsi GA. Quinetiam HB, MD ferentur  
 juxta conicam superficiem, cujus basis est circulus circa diametrum  
 BD ad circulum ABGD rectus, vertex autem punctum in quo con-  
 veniunt BH, DM, secum invicem, & cum recta GA. Haud absimi-  
 liter in altero semicirculo, latera secundùm superficies conicas defe-  
 rentur, iidem hisce consimiles. Itaque quidem inscripta erit sphæræ figu-  
 ra quædam prædictis superficiebus conicis comprehensa, cujus super-  
 ficies minor erit superficie sphæræ. Divisâ enim sphærâ plano per BD  
 recto ad circulum ABGD, superficies alterius hemisphæræ, & su-  
 perfacies

perficies inscriptæ ipsi figuræ eisdem terminos habent in eodem plano; nam utriusque superficiei terminus est superficies circuli, qui circa diametrum BD circulo ABGD rectus; suntque ambæ ad eisdem partes cavæ, atque ipsarum unâ superficies comprehenditur ab altera, ac plano habenti eisdem cum ipso terminos. Haud aliter superficies figuræ in altero hæmisphærio minor est superficie hemisphærii: tota igitur superficies figuræ, quæ in sphæra, minor est superficie sphæræ.

## Prop. XXVII.

Fig. 31.

In sphæram inscripta figuræ (AEBFCGDH) superficies æquatur circulo, cujus radius potest rectangulum comprehensum sub figuræ lateræ AE, & rectâ (EH + BD + FG) æquali omnibus latera figuræ conjungentibus, parallelisque duo figuræ latera subtendenti (EH).

a 17. hujus.  
b cor. 2. 12.  
c 19 hujus.  
d 3. ass. 1.

Nam  $\odot \text{rad} \sqrt{AE \times \frac{EH}{2}}^2 = \text{superf. conica EAH.}^b$  quare  $\odot \text{rad} \sqrt{AE \times EH} = 2 \text{ superf. EAH.}$  Item (simili pacto)  $\odot \text{rad} \sqrt{BE \times BD + EH^c} = 2 \text{ superf. BEHD.}^d$  ergo  $\odot \text{rad} \sqrt{AE \times EH + BD + FG} = 2 \text{ superf. EAH + BEHD} = \text{superf. AEBFCGDH.}$

a hac, & cor. 24.  
b hujus.

Coroll. \* Hinc  $\odot \text{rad} \sqrt{AC \times CE} = \text{fig. AEBFCGDH.}$

## Prop. XXVIII.

In sphæram inscripta figuræ superficies (I) conicis superficiebus contenta, minor est quàm quadrupla maximi circuli (ABCD) eorum qui sunt in sphæra.

a coroll. 27 b.  
b cor. 2. 12.

Nam superf. I<sup>a</sup> =  $\odot \text{rad} \sqrt{AC \times CE} \rightarrow \odot \text{rad AC}^b = 4 \odot \text{rad AL.}$

## Prop. XXIX.

Fig. 33.

In sphæram inscripta figuræ (AFHDCBGE) superficiebus conicis contenta, æqualis est conus (K) basin quidem habens circumulum æqualem superficiei figuræ inscriptæ in sphæram, altitudinem verò æqualem perpendiculari (XZ) à sphæra centro (Z) in polygoni latus unum ductæ.

Ducantur radii XE, XF, XG, XH, & connectantur anguli ab A utrinque æquæ remoti rectis EF, GH. Estque Rhombo EXFA<sup>a</sup> æqualis

<sup>a</sup> æqualis conus base conicâ superficie E A F, altitudine X Z. Item, <sup>a 21</sup> *hujus.* productis G E, H F ad Q; si ex Rhombo G X H Q subducatur Rhombus E X F Q, residuo E G X H F <sup>b</sup> æquabitur conus base super- <sup>b 23</sup> *hujus.* ficie conicâ E G H F, altitudine quoque X Z. Similiter, productis B G, D H ad P, si ex cono B P D, subtrahatur Rhombus G X H P, residuo G B X D H <sup>c</sup> æqualis erit conus, cujus basis æquatur conicæ <sup>c 22</sup> *hujus.* superficiiei B G H D, altitudo rursus ipsi Z X. Idem erit in reliquo hemisphærio B C D. ergo cum hisce conis omnibus <sup>d</sup> æquetur conus <sup>d 11, 12.</sup> K; is solido quoque inscripto æquabitur. Q. E. D.

## Prop. XXX.

*Inscripta sphæra figura conicis superficiebus contenta minor est quàm quadrupla coni (M) basin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò æqualem radio sphæra.*

Nam coni K, in præcedente, <sup>a</sup> basis minor est quàm quadrupla cir- <sup>a hyp. & 29. b.</sup> culi maximi, & ejus quoque altitudo X Z minor radio sphæra; ergo <sup>11, 12.</sup> quadruplus coni M major est isto cono K, hoc est figurâ inscriptâ. Q. E. D.

## Prop. XXXI.

Sit in sphæra maximus circulus ABGD. Circa verò circulum ABGD Fig. 34. describatur polygonum æquiangulum & æquilatèrum; multitudo autem laterum ipsius mensuretur à quaternario. Circulo autem circumscriptum polygonum comprehendat circulus circumscriptus E Z H T, circa idem centrum existens ac ABGD. Manente verò E H circumvolvatur planum E Z H T, in quo polygonum & circulus. Liqueat igitur quòd quidem peripheria circuli ABGD secundum sphærae superficiem deferretur, ipsius autem E Z H T peripheria secundum superficiem alterius sphærae minori concentricæ feretur: contactus autem, ad quos latera tangunt, circulos describant rectos circulo ABGD in minori sphæra. Anguli verò polygoni, præter illos qui ad puncta E, H, secundum peripherias circulorum feruntur in majoris sphærae superficie descriptorum, ad circulum E Z H T rectorum; verum latera polygoni secundum conicas superficies, utique sicut in præcedentibus. Erit igitur figura comprehensa à superficiebus conicis, minori sphærae circumscripta, majori verò inscripta. Quòd autem circumscriptæ figuræ superficies major sit superficie sphærae, sic ostenderetur. Esto enim K D diameter alicujus circuli eorum, qui in minori sunt sphæra, existentibus

bus K, D punctis ad quæ duo latera circumscripti polygoni tangunt circulum A B G D; divisâ nempe sphærâ plano per K D ad circulum A B G D recto, etiam superficies descriptæ circa sphæram figuræ dividetur à plano: utriusque enim superficiei terminus est circumferentia circuli, qui est super diametrum K D ad circulum A B G D rectus; sùntque anibæ ad easdem partes cavæ, & earum altera continetur ab altera superficie, ac plano eodem terminos habenti. Minor igitur est comprehensa portionis sphæricæ superficies superficie figuræ circa ipsam descriptæ. Similiter & reliquæ portionis sphæricæ superficies minor est superficie figuræ ipsi circumscriptæ. Patet igitur quòd tota superficies sphærx minor est superficie figuræ circa ipsam descriptæ.

## Prop. XXXII.

Fig. 35.

*Superficies descriptæ circa sphæram figuræ (E F G H I K L M) aequalis est circulus, cujus radius potest aequale rectangulo comprehenso sub polygoni uno latere (E F), & rectæ equali omnibus polygoni angulos connectentibus (F M + G L + H K), parallelis alicui (F M) subtendentium polygoni latera.*

Centro enim N (quod sphærx centrum est) per angulos polygoni describatur circulus: huic inscripta est figura E F G H I K L M. Ergo patet res ex 27 hujus.

*Coroll.* Ductâ F L est  $\odot$  rad.  $\sqrt{FL \times GL} = \text{super. EFGHIKLM.}$  ibid.

## Prop. XXXIII.

*Figura circa sphæram descriptæ superficies major est quàm quadrupla maximi in sphæra circuli (A B C D).*

Nam (in figura præcedenti) à centro N ad contactus oppositos O, P ducantur rectæ N O, N P (quæ quidem in directum jacent, ob angulos G N O, L N P <sup>a</sup>æquales); connexâ verò F L, sunt F L, O P <sup>c</sup>pares (ob O F, P L <sup>b</sup>parallelas ac pares) quare cum G L <sup>d</sup> $\perp$  F L, erit  $\sqrt{GL \times FL} \perp$  O P. adeoque circulus radio  $\sqrt{GL \times FL}$  (hoc est superficies figuræ E F G H I K L M) major est circulo cujus radius O P, hoc est quadruplo circuli cujus radius N O, hoc est quadruplo A B C D. *Q.E.D.*

*Coroll.* Nota esse L F, P O pares.

Prop.

<sup>a</sup> cor. 15. 1.<sup>b</sup> hyp.<sup>c</sup> 34. 1.<sup>d</sup> 47. 1.<sup>e</sup> cor. 27 huj.<sup>f</sup> cor. 2. 12.  $\odot$ 

4. 2.

## Prop. XXXIV.

Circum minorem spheram (A B C D) descriptæ figuræ æqualis est conus, basim quidem habens circulum æqualem superfici ei ipsius figuræ, altitudinem verò æqualem radio spheræ.

Nam figuræ isti circumscribendo circulum E G I L, patet ex 29. hujus.

## Prop. XXXV. Coroll.

Figura spheræ minori circumscripta major est quàm quadrupla coni, basin quidem habentis maximum in spherâ circulum, altitudinem verò radium spheræ.

Patet conferendo duas proximè antecedentes.

## Prop. XXXVI.

Si spherâ inscripta sit figura (A N B C D), & alia circumscripta (E F G I L) sub similibus polygonis, ad eundem modum quo priùs constructis circumscripta figuræ superficies, ad superficiem inscriptæ, duplicatam rationem habet ejus, quàm latus (G F) circumscripti maximo circulo polygoni, ad latu (B N) polygoni eidem circulo inscripti. Ipsa verò figura circumscripta, ad figuram inscriptam, rationem habet ejusdem rationis triplicatam. Fig. 36.

Nam 1<sup>o</sup> ductis D N, L F, ob similitudinem figurarum est angulus  $\angle G L F$  æqualis angulo  $\angle B D N$ . adeoque rectangula triangula  $G L F$ ,  $B D N$  sunt similia. &  $G L : L F :: B D : D N$ . Est autem  $G L \cdot Q \cdot G L \times L F :: G L : L F :: B D : D N :: B D \cdot Q \cdot B D \times D N$ . & permutando  $G L \cdot Q \cdot B D \cdot Q$  (hoc est  $G L \cdot B D$ , bis, <sup>a</sup> vel  $G F \cdot B N$ , bis)  $:: G L \times L F \cdot B D \times D N :: \odot \text{rad} \sqrt{G L \times L F} \cdot \odot \text{rad} \sqrt{B B \times D N}$  (hoc est)  $:: \text{superf. } E F G I L. \text{superf. } A N B C D. \text{ Q.E.D.}$

2. Ducatur Z O, à centro Z ad tactum O. Estque conus, <sup>f</sup> cujus <sup>f</sup> 34 hujus. basis est  $\odot \text{rad} \sqrt{G L \times L F}$ , & altitudo Z O, <sup>f</sup> æqualis corpori circumscripto. <sup>g</sup> 29 hujus. Conus autem base  $\odot \text{rad} \sqrt{B D \times D N}$ , altitudine Z P, æquatur corpori inscripto. Hi conus <sup>h</sup> similes sunt, (quia  $Z O : Z P :: G O : B P :: G F : B N :: \sqrt{G L \times L F} : \sqrt{B D \times D N}$ ) ergo sunt <sup>k</sup> 15. 5. hi conus (hoc est ista corpora) in triplicata ratione ipsarum Z O, Z P, <sup>l</sup> priùs & 22. 6. vel G F, B N. <sup>m</sup> 12. 12. & <sup>n</sup> 15. 5. Q.E.D.

Prop.

## Prop. XXXVII.

Fig. 37.

*Omnis sphæra superficies (S) quadrupla est maximi circuli, eorum qui sunt in sphæra.*

a 3 hujus.  
b 4 hujus.  
c 8. 5. & 31 b.  
d 36 hujus.  
e const.  
f 17. 6.  
g const.  
h 10. 5.  
\* ut prius.  
k 26 hujus.  
l 8. 5.

Circulus maximi in sphæra circuli quadruplus dicatur X: & primo si fieri potest, sit  $X \supset S$ . Fiat autem, utcumque G. H<sup>a</sup>  $\supset$  S. X. & sphæra circumscribantur ac inscribantur figuræ, (quales innuunt præcedentia) sic ut blatus D E. B C  $\supset$  G.  $\sqrt{GH}$ . Harum verò figurarum superficies appellentur Y, Z. Estque S. Z<sup>c</sup>  $\supset$  Y. Z. <sup>d</sup> = D E. B C, bis <sup>e</sup>  $\supset$  G.  $\sqrt{GH}$  bis <sup>f</sup> = G. H<sup>g</sup>  $\supset$  S. X. <sup>h</sup> ergo Z  $\supset$  X. hoc est inscriptæ figuræ superficies major est quadruplo maximi in sphæra circuli, contra 28 hujus.

Sin verò dicatur  $X \subset S$ . fiat G. H<sup>a</sup>  $\supset$  X. S. ac D E. B C <sup>b</sup>  $\supset$  G.  $\sqrt{GH}$ . estque Y. S<sup>k</sup>  $\supset$  Y. Z<sup>\*</sup>  $\supset$  G. H<sup>g</sup>  $\supset$  X. S. <sup>h</sup> unde Y  $\supset$  X; hoc est circumscriptæ figuræ superficies minor est quadruplo maximi in sphæra circuli, contra 31 hujus. Restat igitur, ut sit  $X = S$ . Q.E.D.

Hoc nobilissimum Theorema (cum eo, quo universale redditur; subsequente ad Prop. XLIX.) inter *Archimedis* (dicam, an omnia quotquot fuerunt Geometrarum) inventa familiam ducit, cum inveniendi subtilitate, tum rei elegantia, sed & utilitate diffusâ.

*Coroll.* Circulus, cujus radius æquatur diametro sphærae, adæquat sphærae superficiem.

*Lemma.* Snt duæ quæcunque rectæ L, M; oportet invenire alteram N, ita ut sit L. M  $\subset$  L. N, ter. Fiat L. P :: P. M. & L. N :: N. P. Erit L. M = L. P, bis = L. N quater  $\subset$  L. N, ter.

## Prop. XXXVIII.

*Omnis sphæra (A) quadrupla est conici (K) basim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò radium sphærae.*

a 3 hujus.  
b Lemma præced.  
c 4 hujus.  
d 8. 5.  
e 36 hujus.  
f const.  
g 10. 5.  
\* prius.

Si fieri potest, sit primum A  $\subset$  4 K. Fiat A. 4 K<sup>a</sup>  $\subset$  L. M<sup>b</sup>  $\subset$  L. N, ter: tum figuræ circumscribantur & inscribantur (quæ vocentur Y, Z) ita ut latus D E. B C <sup>c</sup>  $\supset$  L. N. Estque A. Z<sup>d</sup>  $\supset$  Y. Z<sup>e</sup> = D E. B C, ter <sup>f</sup>  $\supset$  L. N, ter <sup>g</sup>  $\supset$  L. M<sup>g</sup>  $\supset$  A. 4 K. <sup>h</sup> ergo Z  $\supset$  4 K. contra 30 hujus.

Sin dicas esse 4 K  $\subset$  A. sit 4 K. A<sup>a</sup>  $\subset$  L. M<sup>b</sup>  $\subset$  L. N, ter. & D E. B C <sup>c</sup>  $\supset$  L. N. tum erit Y. A.  $\supset$  <sup>d</sup> Y. Z<sup>\*</sup>  $\supset$  L. M. <sup>g</sup>  $\supset$  4 K. A. <sup>h</sup>quare

<sup>h</sup>quare  $Y \supset 4 K$ . contra 35 hujus. Ergo potius est sphæra  $A = 4 K$ .

Q. E. D.

Coroll. Hemisphærium æquatur duplo cono ad eandem basin & æquæ sibi alto; vel cono ad eandem basin & altitudinem habenti duplam.

Prop. XXXIX. Coroll.

Hiscæ verò præmonstratis liquet, quòd omnis cylindrus (A B C D) Fig. 38. basin quidem habens maximum in sphæra circum (A B), altitudinem verò (A D) æqualem diametro sphære, sesquialter est sphære (F G H K); & quòd superficies istius cylindri cum basibus sesquialtera quoque est superficiei sphære.

Nam per E (sphære centrum) ductâ F H ad A B parallelâ, & junctis E A, E B; est

1.  $\frac{1}{6}$  Cyl A B C D  $= \frac{1}{3}$  Cyl A B H F  $=$  con A E B  $= \frac{1}{4}$  sph. F G H K. <sup>a</sup> ergo Cyl A B C D. Sph F G H K :: 6. 4 :: 3. 2.

2. Superf. cyl A B C D  $=$   $\odot$  rad  $\sqrt{A D \times D B} = \odot$  rad A B  $=$   $\odot$  F G H K  $=$  superf. sphære. ergo superf A B C D  $\div 2 \odot$  F G H K. superf. sphære :: 6. 4 :: 3. 2.

a 14. 12.  
b 10. 12.  
c 38 hujus.  
d sch. 15. 5.  
e 16 hujus.  
f 4. 2. & 2 cor.  
12.  
g 37 hujus.

Prop. XL.

Secetur sphæra plano non per centrum, sitque in ipsa maximus circulus A E Z secans perpendiculariter planum secans. Inscribatur autem portioni A B C polygonum æquilaterum, & parilaterum, exceptâ base A B. Haud absimiliter ac antehac, si manente G Z circumducatur figura, anguli quidem D, E, A, B ferentur secundum circulos, quorum diametri D E, A B; latera verò \*figuræ secundum conicas superficies; erique facta figura solida conicis superficiebus comprehensa, basin quidem habens circum, cujus diameter A B, \*verticem autem C: quinimò ut in præcedentibus, superficiem habebit minorem superficie portiones comprehendens. Siquidem tam portiones quam figuræ idem in plano terminus est circumterentia circuli, cujus diameter A B, & ad easdem cavæ sunt ambæ superficies, & una ab altera comprehenditur.

Fig. 39.

\*lego  $\chi\eta\mu\alpha\tau$   $\odot$ .  
προτμήματ  $\odot$ .  
\*lego  $\kappa\alpha\upsilon\phi\lambda\omega$ .  
προκαυφλ.

ax. 4 hujus.

Prop. XLI.

Superficies inscripta in sphære portionem figuræ (A D F B G E C) Fig. 40. æqualis est circulo, cujus radius potest æquale rectangulo comprehenso (sub uno latere (B F) polygoni in maximi circuli segmentum (A B C) inscripto,

inscripti, & recta (FG + DE + AK) æquali omnibus ad segmenti basin (AC) parallelis, cum semisse diametri basis.

- a 17 hujus. Nam  $\odot \text{rad} \sqrt{BF \cdot FH} = \text{superf con } FBG \& \odot \text{rad} \sqrt{\frac{DF}{BF}}$   
 b 19 hujus.  $\times: HG + DI^b = \text{superf. } DFG E$ . Item  $\odot \text{rad} \sqrt{\frac{DA}{BF}} \times: IE + AK^b = \text{superf } ADEC$ . ergo conjunctè  $\odot \text{rad} \sqrt{BF \times: FG + DE + AK} = \text{superf } FBG + DFG E + ADEC = \text{superf } ADFBGE C$ , *Q.E.D.*  
 c { 1. 2. cor. 2. 12. 1. ax. 1. Coroll Ductâ LF, erit  $\odot \text{rad} \sqrt{BK \cdot LF} = \text{superf } ADFBGE C$ .  
 d cor. 25 huj. Nam  $BF \times: FG + DE + AK^d = BK \cdot LF$ .

## Prop. XLII.

Sphæra portioni inscripta figura superficies (S) minor est circulo, cujus radius æquatur ducta (BA) à portionis vertice (B) in circumferentiam circuli (AC) qui basis est con.

- a cor. 8. 6. & 17. 6. Nam  $BK \cdot LF \supset BK \cdot LB^b = B \text{ Aq. } ^b \text{ ergo } \odot \text{rad } BK \cdot LF$   
 b cor. 2. 12. ('hoc est S)  $\supset \odot \text{rad } AB$ .  
 c cor. præc.

## Prop. XLIII.

Fig. 41.

Portioni inscripta figura (ADBE C) conicis superficiebus contenta cum cono (AFC) basin quidem eandem habente cum figura, verticem verò sphæra centrum (F), æquale est cono (K) basin habenti parem superficiei figura, altitudinem verò perpendiculari (FG) à sphæra centro (F) in unum polygoni latus (AD) deducta.

- a 21 huj. Conus enim base superficie D B E, altitudine FG æquatur Rhom-  
 b 23 hujus. bo D F E B. <sup>b</sup> Item conus, cujus basis æquatur superficiei A D E C, altitudo ipsi FG æquatur frusto A D F E C: isti simul cono adæquant conum K; hic Rhombus & frustum constituunt figuram inscriptam cum cono AFC. ergo con K = fig. A D B E C + con AFC. *Q.E.D.*  
 c 11. 12.

Schol. Procedunt hæc circa portionem hemisphærio minorem. In majori AYC subtrahendus est conus AFC, ut sit con K = fig. AYC — con AFC. nempe si figura latus habens AD toti circulo inscribi possit; vel si arcus AD circumulum dimetiri possit, alias non succedit. Similis est discursus; quid plura? Idem in sequentibus intelligendum, analogiâ bene servatâ.

Coroll.



*Coroll.* Conus, cujus basis æquatur circulo radium habente parem rectæ BC à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ, & altitudo radio sphæræ, superat inscriptam figuram cum cono AFC.

Hujus enim coni tam \*basis, quam altitudo superant basim & altitudinem coni K. \* 42 hujus.

*Prop. XLIV.*

Sit sphæra, & in ipsa maximus circulus ABC, & semicirculo abscindatur rectâ AB; sitque centrum D; ac à centro D ad A, B connectantur DA, DB: & circa factum sectorem describatur polygonum, & circa ipsum circulus; habebit utique centrum idem cum circulo ABC: quod si manente EK circumductum polygonum in idem denuò restituatur, descriptus circulus secundum sphæræ superficiem feretur; & anguli polygoni circulos describent, quorum diametri polygoni angulos jungunt paralleli existentes ipsi AB. Puncta verò juxta quæ minorem circulum contingunt polygoni latera in minori sphæra circulos describunt, quorum diametri erunt quæ tactus conjungunt parallelæ existentes ad AB, latera verò secundum conicas superficies ferentur, & erit circumscripta figura conicis superficiebus contenta, cujus basis qui super ZH circulus. Superficies autem dictæ figuræ major est superficie minoris portionis, cujus basis qui circa AB circulus: ducantur enim tangentes AM, BN. secundum conicam ergo superficiem ferentur; & a polygono AMTENB genita figura majorem habebit superficiem, quam portio sphæræ, cujus basis est qui circa diametrum AB circulus: nam in uno eodémque plano terminum habent circulum qui super diametrum AB; & à figura continetur portio. Sed facta ab ipsis ZM, HN superficies conica major, est facta ab ipsis MA, NB; major enim est ZM quam MA (rectum quippe \*subtendit), ac NH, quam NB; quando verò hoc fuerit, major est superficies superficie: hæc enim in lemmatis ostensa sunt. Liquet igitur quod circumscriptæ figuræ superficies major est superficie portionis minoris sphæræ.

Fig. 42.

\* ZAM.  
Facile deducitur ex 19 huj.

*Prop. XLV. Coroll.*

Et patet quod superficies circumscripta sectori figuræ æquatur circulo, cujus radius potest comprehensum & ab uno latere polygoni, & ab omnibus conjungentibus angulos, & præterea semisse basis dicti polygoni.

Fig. 43.

\* Προ ἑγσε γεωμετρικῶν  
80 περιγῶν.  
41 hujus.

Nam \* circumscripta figura, majoris sphæræ portioni inscripta est. Unde liquet ex \*antedictis.

E

*Prop.*

## Prop. XLVI.

Fig. 43.

*Superficies (S) figura (DEFGH) circa sectorem (ZABC) descripta major est circulo, cujus radius aequatur ducta (BA) à vertice (B) portionis in circumferentiam circuli (AC) qui basis est portionis.*

a cor. 41 buj.

b cor. 33 buj.

c hyp. &amp; 4. 6.

d 14. 5. (6.

e cor. 8. &amp; 17.

cor. 2. 12.

Circa figuram describatur sphæra DFHL; & connectantur rectæ DH, FD, LE. estque  $S^2 = \odot \text{rad} \sqrt{LE \times FP} = \odot \text{rad} \sqrt{BM \times EP}$  (ob  $LE = BM$ )  $\leq \odot \text{rad} \sqrt{BM \times BK}$ . (est enim  $FP \cdot BK^c :: FD \cdot BA :: ZD \cdot ZA$ . adeoque  $FP^2 \leq BK$ ). atqui  $\odot \text{rad} \sqrt{BM \times BK^c} = \odot \text{rad} BA$ . ergo  $S \leq \odot \text{rad} BA$ . Q.E.D.

## Prop. XLVII.

Fig. 44.

*Quinetiam circumscripta sectori figura (DEFGH) cum cono (DZH), cujus quidem basis est circulus circa diametrum (DH) vertex verò centrum (Z) aequalis est cono, cujus quidem basis aequalis est superficiei figura, altitudo autem perpendiculari (ZN) à centro ad latus ducta, quæ utique aequalis est radio sphære.*

Figuræ circumducatur sphæra DEFGH; & liquet propositum ex 43 hujus.

## Corollarium.

Hinc apparet circumscriptam figuram cum cono DZH majorem esse cono, basim quidem habente circulum cujus radius æquatur illi (BA) quæ à vertice (B) portionis minoris sphære ad circumferentiam ducitur circuli (AC), qui basis est portionis; altitudinem verò æqualem radio minoris sphære.

a 46. &amp; 47. b.

Nam basis hujus coni <sup>a</sup> minor est base coni, qui æquatur circumscriptæ figuræ; altitudo autem æqualis.

## Prop. XLVIII.

Fig. 45.

Sit rursus sphæra, & in ipsa maximus circulus; ac semicirculo minor portio ABC, & centrum D; & sectori ABC inscribatur polygonum parilaterum, & huic simile circumscribatur, sintque latera lateribus parallela; & circa polygonum circumscriptum describatur circulus; & similiter ac in præcedaneis manente HB circumlati circuli figuras efficiant à conicis superficiebus circumseptas; demonstrandum

strandum est quòd circumscriptæ figuræ superficies ad inscriptæ superficiem duplicatam habet rationem, quam latus circumscripti polygoni ad latus inscripti. Figura verò cum cono triplicatam habet rationem ejusdem.

Nam circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad E Z cum dimidia E Z, & latere E K, <sup>a</sup> æquatur superficiei circumscriptæ: & circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad A C cum dimidia A C, & latere A L, <sup>b</sup> æquatur superficiei inscriptæ. Hæc autem rectangula <sup>\*</sup> similia sunt (ob polygonorum similitudinem) adeoque <sup>d</sup> sese habent, ut quadrata ex lateribus E K, A L: quare & dicti circuli (hoc est superficies circumscriptæ, & inscriptæ) <sup>c</sup> sese habent ut quadrata ex E K, A L, <sup>d</sup> hoc est in duplicatâ ratione ipsarum E K, A L.

2. Ducatur D M perpendicularis ad latera E K, A L. Et quoniam conus, habens basim æqualem superficiei polygoni circumscripti, altitudinem D M, <sup>f</sup> æquatur circumscripto solido cum cono E D Z. & conus, cujus basis æquatur superficiei polygoni inscripti, altitudo ipsi D N, <sup>g</sup> æquatur solido inscripto cum cono A D C. Sunt autem radii basium horum conorum (ut mox vidimus) sicut latera E K, A L, hoc est, ut altitudines D M, D N: <sup>k</sup> ergo hi coni similes sunt; adeoque <sup>l</sup> sunt in triplicatâ ratione radiorum suorum, hoc est ipsarum E K, A L. & <sup>m</sup> proinde solida illis æqualia (circumscriptum cum cono E D Z, & inscriptum cum cono A D C) sunt in eadem ratione triplicata. Q.E.D.

### Prop. XLIX.

Cujuscunque spherica portio (A B C) hemisphærio minoris superficies (S) æqualis est circulo (X) cujus radius æquatur ductæ (B A) à portiois vertice (B) ad circumferentiam circuli (A C) qui basis est portiois spherica. Fig. 46.

Si neget, esto primum  $\odot X \supset S$ . tum portioni circumscribantur & inscribantur figuræ (quarum superficies appellentur Y, Z) sic ut latus E F. A D bis (vel E Fq. A Dq) <sup>a</sup>  $\supset \odot X$ . S. Jam S. X <sup>b</sup>  $\subset$  E Fq. A Dq <sup>c</sup> = Y. Z. <sup>d</sup>  $\subset$  S. Z. unde X <sup>e</sup>  $\supset$  Z, contra 42 hujus. Sin dicatur X  $\subset$  S. sit E Fq. A Dq <sup>a</sup>  $\supset$  X. S. estque X. S. <sup>b</sup>  $\subset$  E Fq. A Dq <sup>c</sup> = Y. Z. <sup>d</sup>  $\subset$  Y. S. unde X <sup>e</sup>  $\subset$  Y, contra 46 hujus. Itaque potius, ut hæc vitentur repugnantia, est  $\odot X = S$ . Q.E.D.

## Prop. L.

Fig. 47.  
48.

Quinimò si portio (A B C) major sit hemisphærio, similiter ejus superficies aequalis erit circulo, cujus radius aequalis est rectæ (B A) à portio-  
nis vertice deductæ ad circumferentiam circuli qui basis est portionis.

a coroll. 38 b.  
b 49 hujus.  
c cor. 2. 12 &  
3. ax. I.

Ductâ enim diametro B D, & connexâ D A, erit circulus radio D B <sup>a</sup> aequalis superficiei totius sphæaræ; & circulus radio D A <sup>b</sup> æ-  
qualis superficiei portionis A D C. Detrahatur hic ab illo, <sup>c</sup> super-  
estque circulus radio B A æqualis residuæ portioni A B C. Q.E.D.

## Corollaria.

1. Cujusvis portionis superficies (A B C) æquatur curvæ super-  
ficiei cylindri (M R S N) habentis eandem altitudinem, vel axem  
(B K), & diametrum (R S) parem radio sphæaræ.

a 16 hujus.

Nam superf. cylindrica M R S N <sup>a</sup> æquatur circulo, cujus radius  $\sqrt{M R \times R S}$ , vel  $\sqrt{B K \times B D}$ , hoc est B A (nam B K, B A, B D sunt  
b 49 & 50 b.  $\div \div$ ) bid est æquantur superficiei portionis A B C. Hinc

2. Superficies portionum A B C, A D C se habent ut axes K B  
K D. Nam cylindricæ superficies ipsis æquales M R S N,  $\mu$  R S <sup>d</sup>,  
se habent ut latera R M, R  $\mu$ , hoc est ut B K, K D.

3. Sphæricarum quarumvis portionum, superficies axibus suis  
proportionales sunt.

d 1. cor. 16 b.

Nam & cylindricis superficiebus quibus æquantur <sup>d</sup> hoc convenit.

4. Sphærica superficies A  $\alpha$   $\gamma$  C parallelis planis A C,  $\alpha$   $\gamma$  inter-  
cepta æquatur cylindricæ superficiei R  $\rho$   $\sigma$  S iisdem planis interceptæ:

Nam si à superficie cylindrica  $\rho$  N, cui æquatur sphærica superf.  
<sup>a</sup> B  $\gamma$  subtrahatur cylindrica superf. R N, cui æquatur sphærica su-  
perficies A B C, remanebit superf. cylind.  $\rho$  S æqualis superf. sphæri-  
cæ A  $\alpha$   $\gamma$  C.

5. Zonæ, seu superficies sphæricæ parallelis planis interceptæ suis  
axibus proportionales sunt.

Quia nempe cylindris, quibus æquales sunt, id convenit.

## Prop. L I.

Fig. 49.

Cuicunque sphæra sectori (G A B C, vel S) æqualis est conus (K)  
basin quidem habens æqualem superficiei portionis (A B C) ad sectorem  
pertinentis, altitudinem verò parem radio sphæaræ. Si

Si neges, esto primùm  $S \sqsubset K$ . fiatque  $S.K^a \sqsubset L.M^b \sqsubset L.N^a$  <sup>3 hujus.</sup>  
 ter. tum portioni circumscribantur & inscribantur figuræ  $X.Y$ , sic <sup>b lem. ad 37 h.</sup>  
 ut latus  $E.F. A.D^c \sqsubset L.N$ . Estque  $S.Y \dashv$  con  $A.G.C^d \sqsubset X \dashv$  <sup>c 5 hujus.</sup>  
 con  $E.Z.G.Y \dashv$  con  $A.G.C^e = E.F. A.D$ , ter <sup>d 8. 5.</sup>  
 $L.M^f \sqsubset S.K$ . <sup>e 48 hujus:</sup> ergo  $Y \dashv$  con  $A.G.C \sqsubset K$ ; contra coroll. 43æ <sup>f const.</sup>  
 hujus. <sup>g 10. 5.</sup>

Sin dicatur  $K \sqsubset S$ . Fiat  $K.S^a \sqsubset L.M^b \sqsubset L.N^a$  ter; & reli-  
 qua, ut prius. & ob  $X \dashv$  con  $E.G.Z$ . <sup>d</sup>  $Y \dashv$  con  $A.Z.G \sqsubset * L.M^* <sup>* prius.</sup>  
 $f \sqsubset K.S^h \sqsubset K.Y \dashv$  con  $A.G.C$ . <sup>e</sup> erit  $X \dashv$  con  $E.G.Z \sqsubset K$ , con- <sup>h 8. 5.</sup>  
 tra coroll. 47æ hujus. quin potius est con  $K =$  sector  $S$ . *Q.E.D.*$

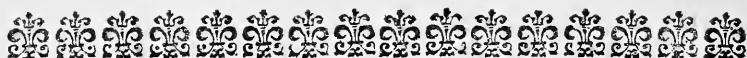
*Schol.* De sectore sphærico minori directè procedit demonstra-  
 tio, sed infertur: idem faciliè de majori. Nam quia conus, cujus basis  
 æquatur toti sphæaræ superficièi, altitudo radio sphæaræ totam sphæ-  
 ram exæquat; & conus, cujus basis æquatur superficièi portionis  
 $A.B.C$ , altitudo itidem radio sphæaræ, sectorem  $A.G.C.B$  adæquat:  
 detracto hoc cono ab illo, restabit conus, habens basim æqualem reli-  
 quæ superficièi sphæricæ, altitudinemque parem radio sphæaræ, æ-  
 qualis residuo sectori majori.

### Corollaria.

1. Hinc sector  $(A.G.C.B)$  æquatur cono, cujus altitudo sphæaræ  
 radio, basis æquatur circulo radium habenti parem subtensæ  $B.A$ .

2. Portio sphærica  $(A.B.C)$  æquatur isti cono, dempto vel addi-  
 to cono  $A.G.C$ ; (addito, si portio major sit hemisphærio, dempto si  
 minor:) si sector hemisphærio æquetur, cum portione coalescit.

Portionem sphæricam cum cono methodo aliâ comparat *Archimedes*, in libro de Conoidibus & Sphæroidibus. Nam sphæaræ & por-  
 tionibus ejus convenit, quicquid istic de sphæroide sphæroidisque  
 portionibus ostenditur, respectivè.



# ARCHIMEDIS

## DE SPHÆRA & CYLINDRO

### LIBER SECUNDUS.

*Archimedes Dositheo Salutem.*

**A**Ntea quidem mandāsti mihi, Problematum demonstrationes scriberem, quorum ipse Propositiones ad *Cononem* miseram. Accidit autem eorum complura inter Theoremata scribi, quorum prius ad te misi demonstrationes: quòd nempe omnis Sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in Sphæra: quinetiam quòd omnis portionis Sphæræ superficiei æquatur circulus, cujus radius æqualis est rectæ à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ. Præterea quòd omnis Sphæræ cylindrus, basin quidem habens maximum circulum ex iis, qui in Sphæra, altitudinem verò parem diametro Sphæræ, cum ipse magnitudine sesquialter est Sphæræ, tum superficies ejus sesquialtera superficiei Sphæræ. \*Adhæc verò, quòd omnis sector solidus æqualis est cono basin quidem habenti circulum æqualem superficiei portionis Sphæræ, quæ in sectore, altitudinem verò parem radio Sphæræ. Quæcunque igitur Theoremata & Problemata scripta sunt \*per hæc Theoremata in hoc libro describens ad te transmissi: quæcunque verò per aliam inveniuntur contemplationem, quæ sc. de Helicibus, & quæ de Conoidibus, propediem adnitar mittere. Problematum autem primum hoc fuit.

\* *Pro τῆς σφῆρας*  
*lego τῆς σφῆρας.*

\* *vel ex his the-*  
*orematis (de-*  
*ducta scilicet)*

*Prop.*

## Prop. I.

*Sphærâ datâ spatium planum invenire æquale superficiei sphæræ.*

Hoc verò manifestum est, è prædictis Theorematis ostensum. Quadruplum enim maximi in sphæra circuli planum spatium est, & æquale superficiei sphæræ.

## Prop. II.

Secundum erat: *Dato cono vel cylindro (AC) sphæram invenire* Fig. 50.  
*cono, vel cylindro parem.* 51.

*Analysis.* Factum sit; sit nempe X diameter sphæræ æqualis cylindro AC, cujus diameter AB, latus BC. Fiat BC. BD :: 2. 3. quare cylindrus AD <sup>a</sup>sesquialter erit cylindri AC, <sup>b</sup>hoc est sphæræ ad diametrum X. ergo cylindrus AD <sup>c</sup>æquatur cylindro, cujus diameter, & altitudo æquantur ipsi X. <sup>d</sup>ergo erit ABq. Xq :: X. BD. unde  $BD^* = \frac{X \text{ cub.}}{ABq}$  at verò AB, X,  $\frac{Xq}{AB}, \frac{X \text{ cub.}}{ABq}$  sunt ÷÷. quare <sup>a</sup> 14. 12. <sup>b</sup> hyp. <sup>c</sup> 39. 1. <sup>d</sup> 15. 12. <sup>e</sup> 14. 12. <sup>f</sup> 39. 1. <sup>g</sup> 1. <sup>h</sup> 12. <sup>i</sup> 12. <sup>j</sup> 12. <sup>k</sup> 12. <sup>l</sup> 12. <sup>m</sup> 12. <sup>n</sup> 12. <sup>o</sup> 12. <sup>p</sup> 12. <sup>q</sup> 12. <sup>r</sup> 12. <sup>s</sup> 12. <sup>t</sup> 12. <sup>u</sup> 12. <sup>v</sup> 12. <sup>w</sup> 12. <sup>x</sup> 12. <sup>y</sup> 12. <sup>z</sup> 12. <sup>aa</sup> 12. <sup>ab</sup> 12. <sup>ac</sup> 12. <sup>ad</sup> 12. <sup>ae</sup> 12. <sup>af</sup> 12. <sup>ag</sup> 12. <sup>ah</sup> 12. <sup>ai</sup> 12. <sup>aj</sup> 12. <sup>ak</sup> 12. <sup>al</sup> 12. <sup>am</sup> 12. <sup>an</sup> 12. <sup>ao</sup> 12. <sup>ap</sup> 12. <sup>aq</sup> 12. <sup>ar</sup> 12. <sup>as</sup> 12. <sup>at</sup> 12. <sup>au</sup> 12. <sup>av</sup> 12. <sup>aw</sup> 12. <sup>ax</sup> 12. <sup>ay</sup> 12. <sup>az</sup> 12. <sup>ba</sup> 12. <sup>bb</sup> 12. <sup>bc</sup> 12. <sup>bd</sup> 12. <sup>be</sup> 12. <sup>bf</sup> 12. <sup>bg</sup> 12. <sup>bh</sup> 12. <sup>bi</sup> 12. <sup>bj</sup> 12. <sup>bk</sup> 12. <sup>bl</sup> 12. <sup>bm</sup> 12. <sup>bn</sup> 12. <sup>bo</sup> 12. <sup>bp</sup> 12. <sup>bq</sup> 12. <sup>br</sup> 12. <sup>bs</sup> 12. <sup>bt</sup> 12. <sup>bu</sup> 12. <sup>bv</sup> 12. <sup>bw</sup> 12. <sup>bx</sup> 12. <sup>by</sup> 12. <sup>bz</sup> 12. <sup>ca</sup> 12. <sup>cb</sup> 12. <sup>cc</sup> 12. <sup>cd</sup> 12. <sup>ce</sup> 12. <sup>cf</sup> 12. <sup>cg</sup> 12. <sup>ch</sup> 12. <sup>ci</sup> 12. <sup>cj</sup> 12. <sup>ck</sup> 12. <sup>cl</sup> 12. <sup>cm</sup> 12. <sup>cn</sup> 12. <sup>co</sup> 12. <sup>cp</sup> 12. <sup>cq</sup> 12. <sup>cr</sup> 12. <sup>cs</sup> 12. <sup>ct</sup> 12. <sup>cu</sup> 12. <sup>cv</sup> 12. <sup>cw</sup> 12. <sup>cx</sup> 12. <sup>cy</sup> 12. <sup>cz</sup> 12. <sup>da</sup> 12. <sup>db</sup> 12. <sup>dc</sup> 12. <sup>dd</sup> 12. <sup>de</sup> 12. <sup>df</sup> 12. <sup>dg</sup> 12. <sup>dh</sup> 12. <sup>di</sup> 12. <sup>dj</sup> 12. <sup>dk</sup> 12. <sup>dl</sup> 12. <sup>dm</sup> 12. <sup>dn</sup> 12. <sup>do</sup> 12. <sup>dp</sup> 12. <sup>dq</sup> 12. <sup>dr</sup> 12. <sup>ds</sup> 12. <sup>dt</sup> 12. <sup>du</sup> 12. <sup>dv</sup> 12. <sup>dw</sup> 12. <sup>dx</sup> 12. <sup>dy</sup> 12. <sup>dz</sup> 12. <sup>ea</sup> 12. <sup>eb</sup> 12. <sup>ec</sup> 12. <sup>ed</sup> 12. <sup>ee</sup> 12. <sup>ef</sup> 12. <sup>eg</sup> 12. <sup>eh</sup> 12. <sup>ei</sup> 12. <sup>ej</sup> 12. <sup>ek</sup> 12. <sup>el</sup> 12. <sup>em</sup> 12. <sup>en</sup> 12. <sup>eo</sup> 12. <sup>ep</sup> 12. <sup>eq</sup> 12. <sup>er</sup> 12. <sup>es</sup> 12. <sup>et</sup> 12. <sup>eu</sup> 12. <sup>ev</sup> 12. <sup>ew</sup> 12. <sup>ex</sup> 12. <sup>ey</sup> 12. <sup>ez</sup> 12. <sup>fa</sup> 12. <sup>fb</sup> 12. <sup>fc</sup> 12. <sup>fd</sup> 12. <sup>fe</sup> 12. <sup>ff</sup> 12. <sup>fg</sup> 12. <sup>fh</sup> 12. <sup>fi</sup> 12. <sup>fj</sup> 12. <sup>fk</sup> 12. <sup>fl</sup> 12. <sup>fm</sup> 12. <sup>fn</sup> 12. <sup>fo</sup> 12. <sup>fp</sup> 12. <sup>fq</sup> 12. <sup>fr</sup> 12. <sup>fs</sup> 12. <sup>ft</sup> 12. <sup>fu</sup> 12. <sup>fv</sup> 12. <sup>fw</sup> 12. <sup>fx</sup> 12. <sup>fy</sup> 12. <sup>fz</sup> 12. <sup>ga</sup> 12. <sup>gb</sup> 12. <sup>gc</sup> 12. <sup>gd</sup> 12. <sup>ge</sup> 12. <sup>gf</sup> 12. <sup>gg</sup> 12. <sup>gh</sup> 12. <sup>gi</sup> 12. <sup>gj</sup> 12. <sup>gk</sup> 12. <sup>gl</sup> 12. <sup>gm</sup> 12. <sup>gn</sup> 12. <sup>go</sup> 12. <sup>gp</sup> 12. <sup>gq</sup> 12. <sup>gr</sup> 12. <sup>gs</sup> 12. <sup>gt</sup> 12. <sup>gu</sup> 12. <sup>gv</sup> 12. <sup>gw</sup> 12. <sup>gx</sup> 12. <sup>gy</sup> 12. <sup>gz</sup> 12. <sup>ha</sup> 12. <sup>hb</sup> 12. <sup>hc</sup> 12. <sup>hd</sup> 12. <sup>he</sup> 12. <sup>hf</sup> 12. <sup>hg</sup> 12. <sup>hh</sup> 12. <sup>hi</sup> 12. <sup>hj</sup> 12. <sup>hk</sup> 12. <sup>hl</sup> 12. <sup>hm</sup> 12. <sup>hn</sup> 12. <sup>ho</sup> 12. <sup>hp</sup> 12. <sup>hq</sup> 12. <sup>hr</sup> 12. <sup>hs</sup> 12. <sup>ht</sup> 12. <sup>hu</sup> 12. <sup>hv</sup> 12. <sup>hw</sup> 12. <sup>hx</sup> 12. <sup>hy</sup> 12. <sup>hz</sup> 12. <sup>ia</sup> 12. <sup>ib</sup> 12. <sup>ic</sup> 12. <sup>id</sup> 12. <sup>ie</sup> 12. <sup>if</sup> 12. <sup>ig</sup> 12. <sup>ih</sup> 12. <sup>ii</sup> 12. <sup>ij</sup> 12. <sup>ik</sup> 12. <sup>il</sup> 12. <sup>im</sup> 12. <sup>in</sup> 12. <sup>io</sup> 12. <sup>ip</sup> 12. <sup>iq</sup> 12. <sup>ir</sup> 12. <sup>is</sup> 12. <sup>it</sup> 12. <sup>iu</sup> 12. <sup>iv</sup> 12. <sup>iw</sup> 12. <sup>ix</sup> 12. <sup>iy</sup> 12. <sup>iz</sup> 12. <sup>ja</sup> 12. <sup>jb</sup> 12. <sup>jc</sup> 12. <sup>jd</sup> 12. <sup>je</sup> 12. <sup>jf</sup> 12. <sup>jj</sup> 12. <sup>jh</sup> 12. <sup>ji</sup> 12. <sup>jj</sup> 12. <sup>jk</sup> 12. <sup>jl</sup> 12. <sup>jm</sup> 12. <sup>jn</sup> 12. <sup>jo</sup> 12. <sup>jp</sup> 12. <sup>jq</sup> 12. <sup>jr</sup> 12. <sup>js</sup> 12. <sup>jt</sup> 12. <sup>ju</sup> 12. <sup>jv</sup> 12. <sup>jw</sup> 12. <sup>jx</sup> 12. <sup>jy</sup> 12. <sup>jz</sup> 12. <sup>ka</sup> 12. <sup>kb</sup> 12. <sup>kc</sup> 12. <sup>kd</sup> 12. <sup>ke</sup> 12. <sup>kf</sup> 12. <sup>kg</sup> 12. <sup>kh</sup> 12. <sup>ki</sup> 12. <sup>kj</sup> 12. <sup>kl</sup> 12. <sup>km</sup> 12. <sup>kn</sup> 12. <sup>ko</sup> 12. <sup>kp</sup> 12. <sup>kq</sup> 12. <sup>kr</sup> 12. <sup>ks</sup> 12. <sup>kt</sup> 12. <sup>ku</sup> 12. <sup>kv</sup> 12. <sup>kx</sup> 12. <sup>ky</sup> 12. <sup>kz</sup> 12. <sup>la</sup> 12. <sup>lb</sup> 12. <sup>lc</sup> 12. <sup>ld</sup> 12. <sup>le</sup> 12. <sup>lf</sup> 12. <sup>lg</sup> 12. <sup>lh</sup> 12. <sup>li</sup> 12. <sup>lj</sup> 12. <sup>lk</sup> 12. <sup>ll</sup> 12. <sup>lm</sup> 12. <sup>ln</sup> 12. <sup>lo</sup> 12. <sup>lp</sup> 12. <sup>lq</sup> 12. <sup>lr</sup> 12. <sup>ls</sup> 12. <sup>lt</sup> 12. <sup>lu</sup> 12. <sup>lv</sup> 12. <sup>lw</sup> 12. <sup>lx</sup> 12. <sup>ly</sup> 12. <sup>lz</sup> 12. <sup>ma</sup> 12. <sup>mb</sup> 12. <sup>mc</sup> 12. <sup>md</sup> 12. <sup>me</sup> 12. <sup>mf</sup> 12. <sup>mg</sup> 12. <sup>mh</sup> 12. <sup>mi</sup> 12. <sup>mj</sup> 12. <sup>mk</sup> 12. <sup>ml</sup> 12. <sup>mn</sup> 12. <sup>mo</sup> 12. <sup>mp</sup> 12. <sup>mq</sup> 12. <sup>mr</sup> 12. <sup>ms</sup> 12. <sup>mt</sup> 12. <sup>mu</sup> 12. <sup>mv</sup> 12. <sup>mw</sup> 12. <sup>mx</sup> 12. <sup>my</sup> 12. <sup>mz</sup> 12. <sup>na</sup> 12. <sup>nb</sup> 12. <sup>nc</sup> 12. <sup>nd</sup> 12. <sup>ne</sup> 12. <sup>nf</sup> 12. <sup>ng</sup> 12. <sup>nh</sup> 12. <sup>ni</sup> 12. <sup>nj</sup> 12. <sup>nk</sup> 12. <sup>nl</sup> 12. <sup>nm</sup> 12. <sup>nn</sup> 12. <sup>no</sup> 12. <sup>np</sup> 12. <sup>nq</sup> 12. <sup>nr</sup> 12. <sup>ns</sup> 12. <sup>nt</sup> 12. <sup>nu</sup> 12. <sup>nv</sup> 12. <sup>nw</sup> 12. <sup>nx</sup> 12. <sup>ny</sup> 12. <sup>nz</sup> 12. <sup>oa</sup> 12. <sup>ob</sup> 12. <sup>oc</sup> 12. <sup>od</sup> 12. <sup>oe</sup> 12. <sup>of</sup> 12. <sup>og</sup> 12. <sup>oh</sup> 12. <sup>oi</sup> 12. <sup>oj</sup> 12. <sup>ok</sup> 12. <sup>ol</sup> 12. <sup>om</sup> 12. <sup>on</sup> 12. <sup>oo</sup> 12. <sup>op</sup> 12. <sup>oq</sup> 12. <sup>or</sup> 12. <sup>os</sup> 12. <sup>ot</sup> 12. <sup>ou</sup> 12. <sup>ov</sup> 12. <sup>ow</sup> 12. <sup>ox</sup> 12. <sup>oy</sup> 12. <sup>oz</sup> 12. <sup>pa</sup> 12. <sup>pb</sup> 12. <sup>pc</sup> 12. <sup>pd</sup> 12. <sup>pe</sup> 12. <sup>pf</sup> 12. <sup>pg</sup> 12. <sup>ph</sup> 12. <sup>pi</sup> 12. <sup>pj</sup> 12. <sup>pk</sup> 12. <sup>pl</sup> 12. <sup>pm</sup> 12. <sup>pn</sup> 12. <sup>po</sup> 12. <sup>pp</sup> 12. <sup>pq</sup> 12. <sup>pr</sup> 12. <sup>ps</sup> 12. <sup>pt</sup> 12. <sup>pu</sup> 12. <sup>pv</sup> 12. <sup>pw</sup> 12. <sup>px</sup> 12. <sup>py</sup> 12. <sup>pz</sup> 12. <sup>qa</sup> 12. <sup>qb</sup> 12. <sup>qc</sup> 12. <sup>qd</sup> 12. <sup>qe</sup> 12. <sup>qf</sup> 12. <sup>qg</sup> 12. <sup>qh</sup> 12. <sup>qi</sup> 12. <sup>qj</sup> 12. <sup>qk</sup> 12. <sup>ql</sup> 12. <sup>qm</sup> 12. <sup>qn</sup> 12. <sup>qo</sup> 12. <sup>qp</sup> 12. <sup>qq</sup> 12. <sup>qr</sup> 12. <sup>qs</sup> 12. <sup>qt</sup> 12. <sup>qu</sup> 12. <sup>qv</sup> 12. <sup>qw</sup> 12. <sup>qx</sup> 12. <sup>qy</sup> 12. <sup>qz</sup> 12. <sup>ra</sup> 12. <sup>rb</sup> 12. <sup>rc</sup> 12. <sup>rd</sup> 12. <sup>re</sup> 12. <sup>rf</sup> 12. <sup>rg</sup> 12. <sup>rh</sup> 12. <sup>ri</sup> 12. <sup>rj</sup> 12. <sup>rk</sup> 12. <sup>rl</sup> 12. <sup>rm</sup> 12. <sup>rn</sup> 12. <sup>ro</sup> 12. <sup>rp</sup> 12. <sup>rq</sup> 12. <sup>rr</sup> 12. <sup>rs</sup> 12. <sup>rt</sup> 12. <sup>ru</sup> 12. <sup>rv</sup> 12. <sup>rw</sup> 12. <sup>rx</sup> 12. <sup>ry</sup> 12. <sup>rz</sup> 12. <sup>sa</sup> 12. <sup>sb</sup> 12. <sup>sc</sup> 12. <sup>sd</sup> 12. <sup>se</sup> 12. <sup>sf</sup> 12. <sup>sg</sup> 12. <sup>sh</sup> 12. <sup>si</sup> 12. <sup>sj</sup> 12. <sup>sk</sup> 12. <sup>sl</sup> 12. <sup>sm</sup> 12. <sup>sn</sup> 12. <sup>so</sup> 12. <sup>sp</sup> 12. <sup>sq</sup> 12. <sup>sr</sup> 12. <sup>ss</sup> 12. <sup>st</sup> 12. <sup>su</sup> 12. <sup>sv</sup> 12. <sup>sw</sup> 12. <sup>sx</sup> 12. <sup>sy</sup> 12. <sup>sz</sup> 12. <sup>ta</sup> 12. <sup>tb</sup> 12. <sup>tc</sup> 12. <sup>td</sup> 12. <sup>te</sup> 12. <sup>tf</sup> 12. <sup>tg</sup> 12. <sup>th</sup> 12. <sup>ti</sup> 12. <sup>tj</sup> 12. <sup>tk</sup> 12. <sup>tl</sup> 12. <sup>tm</sup> 12. <sup>tn</sup> 12. <sup>to</sup> 12. <sup>tp</sup> 12. <sup>tq</sup> 12. <sup>tr</sup> 12. <sup>ts</sup> 12. <sup>tt</sup> 12. <sup>tu</sup> 12. <sup>tv</sup> 12. <sup>tw</sup> 12. <sup>tx</sup> 12. <sup>ty</sup> 12. <sup>tz</sup> 12. <sup>ua</sup> 12. <sup>ub</sup> 12. <sup>uc</sup> 12. <sup>ud</sup> 12. <sup>ue</sup> 12. <sup>uf</sup> 12. <sup>ug</sup> 12. <sup>uh</sup> 12. <sup>ui</sup> 12. <sup>uj</sup> 12. <sup>uk</sup> 12. <sup>ul</sup> 12. <sup>um</sup> 12. <sup>un</sup> 12. <sup>uo</sup> 12. <sup>up</sup> 12. <sup>uq</sup> 12. <sup>ur</sup> 12. <sup>us</sup> 12. <sup>ut</sup> 12. <sup>uu</sup> 12. <sup>uv</sup> 12. <sup>uw</sup> 12. <sup>ux</sup> 12. <sup>uy</sup> 12. <sup>uz</sup> 12. <sup>va</sup> 12. <sup>vb</sup> 12. <sup>vc</sup> 12. <sup>vd</sup> 12. <sup>ve</sup> 12. <sup>vf</sup> 12. <sup>vg</sup> 12. <sup>vh</sup> 12. <sup>vi</sup> 12. <sup>vj</sup> 12. <sup>vk</sup> 12. <sup>vl</sup> 12. <sup>vm</sup> 12. <sup>vn</sup> 12. <sup>vo</sup> 12. <sup>vp</sup> 12. <sup>vq</sup> 12. <sup>vr</sup> 12. <sup>vs</sup> 12. <sup>vt</sup> 12. <sup>vu</sup> 12. <sup>vv</sup> 12. <sup>vw</sup> 12. <sup>vx</sup> 12. <sup>vy</sup> 12. <sup>vz</sup> 12. <sup>wa</sup> 12. <sup>wb</sup> 12. <sup>wc</sup> 12. <sup>wd</sup> 12. <sup>we</sup> 12. <sup>wf</sup> 12. <sup>wg</sup> 12. <sup>wh</sup> 12. <sup>wi</sup> 12. <sup>wj</sup> 12. <sup>wk</sup> 12. <sup>wl</sup> 12. <sup>wm</sup> 12. <sup>wn</sup> 12. <sup>wo</sup> 12. <sup>wp</sup> 12. <sup>wq</sup> 12. <sup>wr</sup> 12. <sup>ws</sup> 12. <sup>wt</sup> 12. <sup>wu</sup> 12. <sup>wv</sup> 12. <sup>ww</sup> 12. <sup>wx</sup> 12. <sup>wy</sup> 12. <sup>wz</sup> 12. <sup>xa</sup> 12. <sup>xb</sup> 12. <sup>xc</sup> 12. <sup>xd</sup> 12. <sup>xe</sup> 12. <sup>xf</sup> 12. <sup>xg</sup> 12. <sup>xh</sup> 12. <sup>xi</sup> 12. <sup>xj</sup> 12. <sup>xk</sup> 12. <sup>xl</sup> 12. <sup>xm</sup> 12. <sup>xn</sup> 12. <sup>xo</sup> 12. <sup>xp</sup> 12. <sup>xq</sup> 12. <sup>xr</sup> 12. <sup>xs</sup> 12. <sup>xt</sup> 12. <sup>xu</sup> 12. <sup>xv</sup> 12. <sup>xw</sup> 12. <sup>xx</sup> 12. <sup>xy</sup> 12. <sup>xz</sup> 12. <sup>ya</sup> 12. <sup>yb</sup> 12. <sup>yc</sup> 12. <sup>yd</sup> 12. <sup>ye</sup> 12. <sup>yf</sup> 12. <sup>yg</sup> 12. <sup>yh</sup> 12. <sup>yi</sup> 12. <sup>yj</sup> 12. <sup>yk</sup> 12. <sup>yl</sup> 12. <sup>ym</sup> 12. <sup>yn</sup> 12. <sup>yo</sup> 12. <sup>yp</sup> 12. <sup>yq</sup> 12. <sup>yr</sup> 12. <sup>ys</sup> 12. <sup>yt</sup> 12. <sup>yu</sup> 12. <sup>yv</sup> 12. <sup>yw</sup> 12. <sup>yx</sup> 12. <sup>yy</sup> 12. <sup>yz</sup> 12. <sup>za</sup> 12. <sup>zb</sup> 12. <sup>zc</sup> 12. <sup>zd</sup> 12. <sup>ze</sup> 12. <sup>zf</sup> 12. <sup>zg</sup> 12. <sup>zh</sup> 12. <sup>zi</sup> 12. <sup>zj</sup> 12. <sup>zk</sup> 12. <sup>zl</sup> 12. <sup>zm</sup> 12. <sup>zn</sup> 12. <sup>zo</sup> 12. <sup>zp</sup> 12. <sup>zq</sup> 12. <sup>zr</sup> 12. <sup>zs</sup> 12. <sup>zt</sup> 12. <sup>zu</sup> 12. <sup>zv</sup> 12. <sup>zw</sup> 12. <sup>zx</sup> 12. <sup>zy</sup> 12. <sup>zz</sup> 12. <sup>aa</sup> 12. <sup>ab</sup> 12. <sup>ac</sup> 12. <sup>ad</sup> 12. <sup>ae</sup> 12. <sup>af</sup> 12. <sup>ag</sup> 12. <sup>ah</sup> 12. <sup>ai</sup> 12. <sup>aj</sup> 12. <sup>ak</sup> 12. <sup>al</sup> 12. <sup>am</sup> 12. <sup>an</sup> 12. <sup>ao</sup> 12. <sup>ap</sup> 12. <sup>aq</sup> 12. <sup>ar</sup> 12. <sup>as</sup> 12. <sup>at</sup> 12. <sup>au</sup> 12. <sup>av</sup> 12. <sup>aw</sup> 12. <sup>ax</sup> 12. <sup>ay</sup> 12. <sup>az</sup> 12. <sup>ba</sup> 12. <sup>bb</sup> 12. <sup>bc</sup> 12. <sup>bd</sup> 12. <sup>be</sup> 12. <sup>bf</sup> 12. <sup>bg</sup> 12. <sup>bh</sup> 12. <sup>bi</sup> 12. <sup>bj</sup> 12. <sup>bk</sup> 12. <sup>bl</sup> 12. <sup>bm</sup> 12. <sup>bn</sup> 12. <sup>bo</sup> 12. <sup>bp</sup> 12. <sup>bq</sup> 12. <sup>br</sup> 12. <sup>bs</sup> 12. <sup>bt</sup> 12. <sup>bu</sup> 12. <sup>bv</sup> 12. <sup>bw</sup> 12. <sup>bx</sup> 12. <sup>by</sup> 12. <sup>bz</sup> 12. <sup>ca</sup> 12. <sup>cb</sup> 12. <sup>cc</sup> 12. <sup>cd</sup> 12. <sup>ce</sup> 12. <sup>cf</sup> 12. <sup>cg</sup> 12. <sup>ch</sup> 12. <sup>ci</sup> 12. <sup>cj</sup> 12. <sup>ck</sup> 12. <sup>cl</sup> 12. <sup>cm</sup> 12. <sup>cn</sup> 12. <sup>co</sup> 12. <sup>cp</sup> 12. <sup>cq</sup> 12. <sup>cr</sup> 12. <sup>cs</sup> 12. <sup>ct</sup> 12. <sup>cu</sup> 12. <sup>cv</sup> 12. <sup>cw</sup> 12. <sup>cx</sup> 12. <sup>cy</sup> 12. <sup>cz</sup> 12. <sup>da</sup> 12. <sup>db</sup> 12. <sup>dc</sup> 12. <sup>dd</sup> 12. <sup>de</sup> 12. <sup>df</sup> 12. <sup>dg</sup> 12. <sup>dh</sup> 12. <sup>di</sup> 12. <sup>dj</sup> 12. <sup>dk</sup> 12. <sup>dl</sup> 12. <sup>dm</sup> 12. <sup>dn</sup> 12. <sup>do</sup> 12. <sup>dp</sup> 12. <sup>dq</sup> 12. <sup>dr</sup> 12. <sup>ds</sup> 12. <sup>dt</sup> 12. <sup>du</sup> 12. <sup>dv</sup> 12. <sup>dw</sup> 12. <sup>dx</sup> 12. <sup>dy</sup> 12. <sup>dz</sup> 12. <sup>ea</sup> 12. <sup>eb</sup> 12. <sup>ec</sup> 12. <sup>ed</sup> 12. <sup>ee</sup> 12. <sup>ef</sup> 12. <sup>eg</sup> 12. <sup>eh</sup> 12. <sup>ei</sup> 12. <sup>ej</sup> 12. <sup>ek</sup> 12. <sup>el</sup> 12. <sup>em</sup> 12. <sup>en</sup> 12. <sup>eo</sup> 12. <sup>ep</sup> 12. <sup>eq</sup> 12. <sup>er</sup> 12. <sup>es</sup> 12. <sup>et</sup> 12. <sup>eu</sup> 12. <sup>ev</sup> 12. <sup>ew</sup> 12. <sup>ex</sup> 12. <sup>ey</sup> 12. <sup>ez</sup> 12. <sup>fa</sup> 12. <sup>fb</sup> 12. <sup>fc</sup> 12. <sup>fd</sup> 12. <sup>fe</sup> 12. <sup>ff</sup> 12. <sup>fg</sup> 12. <sup>fh</sup> 12. <sup>fi</sup> 12. <sup>fj</sup> 12. <sup>fk</sup> 12. <sup>fl</sup> 12. <sup>fm</sup> 12. <sup>fn</sup> 12. <sup>fo</sup> 12. <sup>fp</sup> 12. <sup>fq</sup> 12. <sup>fr</sup> 12. <sup>fs</sup> 12. <sup>ft</sup> 12. <sup>fu</sup> 12. <sup>fv</sup> 12. <sup>fw</sup> 12. <sup>fx</sup> 12. <sup>fy</sup> 12. <sup>fz</sup> 12. <sup>ga</sup> 12. <sup>gb</sup> 12. <sup>gc</sup> 12. <sup>gd</sup> 12. <sup>ge</sup> 12. <sup>gf</sup> 12. <sup>gg</sup> 12. <sup>gh</sup> 12. <sup>gi</sup> 12. <sup>gj</sup> 12. <sup>gk</sup> 12. <sup>gl</sup> 12. <sup>gm</sup> 12. <sup>gn</sup> 12. <sup>go</sup> 12. <sup>gp</sup> 12. <sup>gq</sup> 12. <sup>gr</sup> 12. <sup>gs</sup> 12. <sup>gt</sup> 12. <sup>gu</sup> 12. <sup>gv</sup> 12. <sup>gw</sup> 12. <sup>gx</sup> 12. <sup>gy</sup> 12. <sup>gz</sup> 12. <sup>ha</sup> 12. <sup>hb</sup> 12. <sup>hc</sup> 12. <sup>hd</sup> 12. <sup>he</sup> 12. <sup>hf</sup> 12. <sup>hg</sup> 12. <sup>hh</sup> 12. <sup>hi</sup> 12. <sup>hj</sup> 12. <sup>hk</sup> 12. <sup>hl</sup> 12. <sup>hm</sup> 12. <sup>hn</sup> 12. <sup>ho</sup> 12. <sup>hp</sup> 12. <sup>hq</sup> 12. <sup>hr</sup> 12. <sup>hs</sup> 12. <sup>ht</sup> 12. <sup>hu</sup> 12. <sup>hv</sup> 12. <sup>hw</sup> 12. <sup>hx</sup> 12. <sup>hy</sup> 12. <sup>hz</sup> 12. <sup>ia</sup> 12. <sup>ib</sup> 12. <sup>ic</sup> 12. <sup>id</sup> 12. <sup>ie</sup> 12. <sup>if</sup> 12. <sup>ig</sup> 12. <sup>ih</sup> 12. <sup>ii</sup> 12. <sup>ij</sup> 12. <sup>ik</sup> 12. <sup>il</sup> 12. <sup>im</sup> 12. <sup>in</sup> 12. <sup>io</sup> 12. <sup>ip</sup> 12. <sup>iq</sup> 12. <sup>ir</sup> 12. <sup>is</sup> 12. <sup>it</sup> 12. <sup>iu</sup> 12. <sup>iv</sup> 12. <sup>iw</sup> 12. <sup>ix</sup> 12. <sup>iy</sup> 12. <sup>iz</sup> 12. <sup>ja</sup> 12. <sup>jb</sup> 12. <sup>jc</sup> 12. <sup>jd</sup> 12. <sup>je</sup> 12. <sup>jf</sup> 12. <sup>jj</sup> 12. <sup>jh</sup> 12. <sup>ji</sup> 12. <sup>jj</sup> 12. <sup>jk</sup> 12. <sup>jl</sup> 12. <sup>jm</sup> 12. <sup>jn</sup> 12. <sup>jo</sup> 12. <sup>jp</sup> 12. <sup>jq</sup> 12. <sup>jr</sup> 12. <sup>js</sup> 12. <sup>jt</sup> 12. <sup>ju</sup> 12. <sup>jv</sup> 12. <sup>jw</sup> 12. <sup>jx</sup> 12. <sup>jy</sup> 12. <sup>jz</sup> 12. <sup>ka</sup> 12. <sup>kb</sup> 12. <sup>kc</sup> 12. <sup>kd</sup> 12. <sup>ke</sup> 12. <sup>kf</sup> 12. <sup>kg</sup> 12. <sup>kh</sup> 12. <sup>ki</sup> 12. <sup>kj</sup> 12. <sup>kl</sup> 12. <sup>km</sup> 12. <sup>kn</sup> 12. <sup>ko</sup> 12. <sup>kp</sup> 12. <sup>kq</sup> 12. <sup>kr</sup> 12. <sup>ks</sup> 12. <sup>kt</sup> 12. <sup>ku</sup> 12. <sup>kv</sup> 12. <sup>kx</sup> 12. <sup>ky</sup> 12. <sup>kz</sup> 12. <sup>la</sup> 12. <sup>lb</sup> 12. <sup>lc</sup> 12. <sup>ld</sup> 12. <sup>le</sup> 12. <sup>lf</sup> 12. <sup>lg</sup> 12. <sup>lh</sup> 12. <sup>li</sup> 12. <sup>lj</sup> 12. <sup>lk</sup> 12. <sup>ll</sup> 12. <sup>lm</sup> 12. <sup>ln</sup> 12. <sup>lo</sup> 12. <sup>lp</sup> 12. <sup>lq</sup> 12. <sup>lr</sup> 12. <sup>ls</sup> 12. <sup>lt</sup> 12. <sup>lu</sup> 12. <sup>lv</sup> 12. <sup>lw</sup> 12. <sup>lx</sup> 12. <sup>ly</sup> 12. <sup>lz</sup> 12. <sup>ma</sup> 12. <sup>mb</sup> 12. <sup>mc</sup> 12. <sup>md</sup> 12. <sup>me</sup> 12. <sup>mf</sup> 12. <sup>mg</sup> 12. <sup>mh</sup> 12. <sup>mi</sup> 12. <sup>mj</sup> 12. <sup>mk</sup> 12. <sup>ml</sup> 12. <sup>mn</sup> 12. <sup>mo</sup> 12. <sup>mp</sup> 12. <sup>mq</sup> 12. <sup>mr</sup> 12. <sup>ms</sup> 12. <sup>mt</sup> 12. <sup>mu</sup> 12. <sup>mv</sup> 12. <sup>mw</sup> 12. <sup>mx</sup> 12. <sup>my</sup> 12. <sup>mz</sup> 12. <sup>na</sup> 12. <sup>nb</sup> 12. <sup>nc</sup> 12. <sup>nd</sup> 12. <sup>ne</sup> 12. <sup>nf</sup> 12. <sup>ng</sup> 12. <sup>nh</sup> 12. <sup>ni</sup> 12. <sup>nj</sup> 12. <sup>nk</sup> 12. <sup>nl</sup> 12. <sup>nm</sup> 12. <sup>nn</sup> 12. <sup>no</sup> 12. <sup>np</sup> 12. <sup>nq</sup> 12. <sup>nr</sup> 12. <sup>ns</sup> 12. <sup>nt</sup> 12. <sup>nu</sup> 12. <sup>nv</sup> 12. <sup>nw</sup> 12. <sup>nx</sup> 12. <sup>ny</sup> 12. <sup>nz</sup> 12. <sup>oa</sup> 12. <sup>ob</sup> 12. <sup>oc</sup> 12. <sup>od</sup> 12. <sup>oe</sup> 12. <sup>of</sup> 12. <sup>og</sup> 12. <sup>oh</sup> 12. <sup>oi</sup> 12. <

a hyp.

Nam ob  $KE \cdot KV^2 :: KD \cdot CV$ ;  $KE \cdot KV :: CV \cdot KD$ ; erit dividendo  $VE \cdot KV :: CV \cdot KD$ ; & permutando  $VE \cdot CV :: KV \cdot KD$ ; & componendo

b 14. 12.

do  $CE \cdot CV$  (hoc est. con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad } KB \\ \text{alt. } CE \end{matrix} \right\}$  con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad } KB \\ \text{alt. } CV \end{matrix} \right\}$ ) ::

c 20. 6.

$DV \cdot KD :: DVq \cdot DBq :: VBq \cdot KBq ::$  con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad } VB \\ \text{alt. } CV \end{matrix} \right\}$

d 8, &amp; 22. 6.

e 11. 12.

con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad } KB \\ \text{alt. } CV \end{matrix} \right\}$  ergo<sup>f</sup> erit con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad } KB \\ \text{alt. } CE \end{matrix} \right\} = \text{con } \left. \begin{matrix} \text{bas. rad } VB \\ \text{alt. } CV \end{matrix} \right\}$

f 9. 9.

g 1. &amp; 2 cor.

h 1. huj.

i 14. 12. &amp; 3.

AN. 1.

$\varepsilon =$  port  $BVA$  — con  $BCA$ . auferatur utrinque con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad. } KB \\ \text{alt. } CK \end{matrix} \right\}$

$=$  con  $BCA$ ; restabit con  $\left. \begin{matrix} \text{bas. rad } KB \\ \text{alt. } KE \end{matrix} \right\} = \text{port. } ABC. QED.$

Si portio major sit hemisphærio, idem planè discursus adhibetur, nisi quòd hìc utrinque sit addendus conus  $BCA$ , sicut istic aufertur.

## Corollarium.

Hinc facile est datæ portioni, ad eandem basin, æqualem conum constituere; faciendo sc.  $KD \cdot KD \cdot CV :: KV \cdot KE$ ; eritque  $KE$  quæsitæ coni altitudo. Tertium Problema hoc erat:

## Prop. IV.

Fig. 53.

*Datam sphæram (BVAD) plano secare, ita ut portionum superficies ad se rationem habeant, eandem datæ (X ad Y).*

a 2 cor. 50. 1 h.

b 10. 6.

Quia superficies sphæricæ<sup>a</sup> se habent ut axes; liquet si diameter sphære<sup>b</sup> secetur ad  $K$ , ut segmenta  $VK, KD$  sint in ratione  $X$  ad  $Y$ , & per  $K$  ducatur planum  $BA$  ad ipsam  $VD$  rectum, esse superficiem  $BVA$  ad superficiem  $BDA$ , ut  $VK$  ad  $KD$ , vel  $X$  ad  $Y$ ; & proinde factum esse quod postulatur.

## Prop. V.

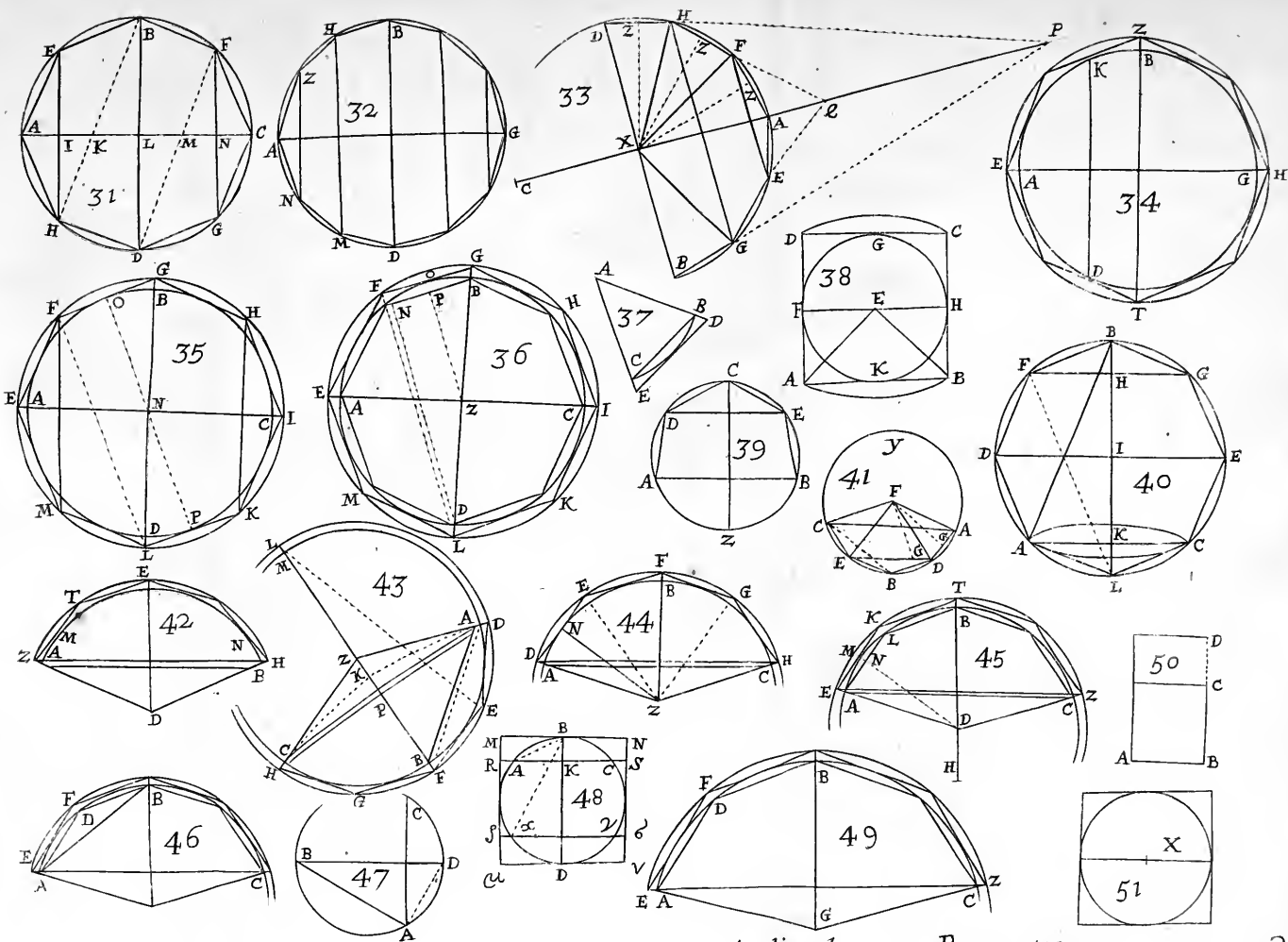
Fig. 54.

*Datam sphæram (BVAD) plano ita secare, ut portiones sphære rationem habeant eandem datæ (X ad Y).*

\*C centrum  
sphære.

*Analysis.* Factum sit; secet nempe planum  $BA$  sphæram, ita ut portiones  $BVA, BDA$  habeant rationem  $X$  ad  $Y$ ; & sit  $VD$  portionum axis; sintque  $VD = d$ ,  $*CV = r$ ,  $DK = a$ . unde  $KV =$







2r—a. Jam si DK. DK + CV :: KV. KE, hoc est a. a + r :: 2r—

a. KE =  $\frac{2rr + ra - aa}{a}$ . a erit conus BEA æqualis portioni BVA. a 3 hujus.

Item si V K. VK + CV :: KD. KF; hoc est 2r—a. 3r—a :: a.

$\frac{3ra - aa}{2r - a} = K$ , a erit conus BFA æqualis portioni BDA. b ergo X.Y b hyp. & 7.5.

:: con BEA. con BFA c :: KE. KF ::  $\frac{2rr + ra - aa}{a}$ .  $\frac{3ra - aa}{2r - a}$  :: X. c 14 12.

Y. quare (ducendo in se extrema & media) erit  $\frac{3xra - xaa}{2r - a} =$

$\frac{2yrr + yra - yaa}{a}$ ; & (utrumque latus multiplicando per 2r—a & a)

erit 3xraa—xa<sup>3</sup> = 4ry<sup>3</sup>—3yraa—ya<sup>3</sup>. & (transponendo) 3xraa—3yraa—xa<sup>3</sup>—ya<sup>3</sup> = 4ry<sup>3</sup>. & (utrinque dividendo per x—y) 3raa—

a<sup>3</sup> =  $\frac{4yr^3}{x+y} = \frac{*yrd}{x+y}$  (\*substituendo dd pro 4r<sup>2</sup>). & faciendo x+y. \* 4. 2.

y :: r. p =  $\frac{yr}{x+y}$ , erit 3raa—a<sup>3</sup> = pdd. hoc est, æquationem hanc, ad

analogismum redigendo, 3r—a.p :: dd.aa. hoc est CV+KV.  $\frac{Y \times CV}{Y + X}$

:: V Dq. D Kq. qui ipsissimus est analogismus ad quem rem deduxit Archimedes, (quod, ut hoc obiter moneam, satis prodit qualem is analysin usurpavit; nam huc eum devenisse varias istas proportionum compositiones, divisiones, alternationes, & inversiones, quas ostentat, adhibendo, penè supra fidem sit: quod si fecisset, casui potius imputandum esset, quàm arti, quòd in genuinas inciderit solutiones, & hoc ei constanter obtigisse, vix concipi potest.

Ipsum Problema quod attinet, liquet illud esse solidum, nec in eo genere facillimum effectum; integram pollicetur Author ejus resolutionem & compositionem, at quòd præstiterit non apparet. Ei suppleto defectui nonnullas Eutocius bene longas & laboriosas exhibet constructiones, per conicarum utique sectionum occurfus, quas nos omittimus. Præ illis concinnam & expeditam constructionem tradit Excellentissimus Hugenius, in primo Problematum illustrium, quam vide sis; vel adhibeas ipse generalem Cartesii methodum, quam pro construendis hujusmodi problematis edocer, in Geometriæ suæ tercio.) Nos Authoris insistentes vestigiis suppositâ hujus analogismi effectione, problema sic componimus.

a 20 6.

b conf.

c 11.5.

d conf. &amp; 11.

5.

e 14.12.

f conf. &amp; 3 h.

Fiat  $X \perp Y$ .  $Y :: CV.P$ ; & secetur  $DV$  in  $K$ , ita ut sit  $CV \perp KV.P :: V.Dq. KDq.$  & per  $K$  transeat planum ipsi  $V D$  rectum. Dico factum. Nam sit  $CV \perp DK. DK :: KE.KV.$  &  $CD \perp VK. VK :: KE.KD$ , eritque dividendo  $CV.DK :: VE.KV.$  &  $CD.VK :: DF.KD$ . permutandoque  $CV.VE :: DK.KV :: DF.CD$ . inversoque componendo  $CE.CV(CD) :: CF.DF.$  & tam antecedentes quàm consequentes conjungendo  $EF.CF :: CF.DF.$  unde  $EF.DF :: CFq.DFq :: DVq.DKq$  (erat enim prius  $CD, DF :: KV.DK$ ; adeoque componendo  $CF.DF :: DV.DK$ ). atqui  $DVq.KDq :: CV \perp KV.P.$  ergo  $EF.DF :: CV \perp KV.P.$  quinetiam fuit  $CV \perp VK.VK :: KE.KD$ ; & conversione rationis  $CV \perp VK.CV :: KE.DF$ , seu inversè  $CV \perp VK :: DF.KF.$  ergo ex æquo perturbatè  $CV.P :: EF.KF.$  id est  $X \perp Y.Y :: EF.KF.$  & dividim  $X.Y :: EK.KF$  con  $BEA.$  con  $BFA$   $f ::$  port  $BVA$  port  $BDA :: X.Y. \mathcal{Q}.E.F.$

### Lemma, pro sequenti.

Fig. 55.

56.

Sint coni  $DMF, GOI$  æquales similibus sphæricis portionibus  $DEF, GHI$  (ad easdem bases constitutis); dico conos hos assimilari.

a 3 hujus.

b 24 def. 11.

Nam productis axibus  $MNR, OPT$  sint sphærarum centra  $Q, S.$  & ob portionum similitudinem erit  $EN.NR :: HP.PT.$  & antecedentes dimidiando  $QR.NR :: ST.PT.$  componendoque  $QR \perp NR.NR :: ST \perp PT.PT.$  hoc est  $MN.EN :: OP.HP.$  at rursus, ob portionum similitudinem, est  $EN.ND :: HP.PG.$  ergo ex æquali  $MN.ND :: OP.PG.$  ergo coni  $DMF, GOI$  sunt similes.  $\mathcal{Q}.E.D.$

### Prop. VI.

Fig. 57.

Data sphære portio (DEF) similem, alterique data (ABC) æqualem constituere.

a 1. ax. 1.

b 15.12.

c elem. frac.

d 24 def. 11.

e 7.5.

*Analysis.* Sit  $GHI$  portio quæ sita, fiântque coni  $AKC, DMF, GOI$  æquales portionibus  $ABC, DMF, GOI$ , singulæ singulis ordine.  $^a$  Quare con  $GOI =$  con  $AKC.$  &  $^b$  idcirco  $ACq. G Iq :: PO.LK.$  \* unde  $\frac{ACq * LK}{G Iq} = PO.$  Item ob  $^c$  similitudinem conorum  $DMF, GOI$   $^d$  est  $DF.NM :: GI.PO :: ^e GI. \frac{ACQ * LK}{G Iq} :: GI$

$\therefore G I \text{ cub. } A C q \times L K. \text{ quare } \frac{D F \times A C q \times L K}{N M} = G I \text{ cub.} \& (\text{di-}$   
 videndo per  $A C q) \frac{D F \times L K}{N M} = \frac{G I \text{ cub.}}{A C q}.$  atqui  $A C, G I, \frac{G I q}{A C}, \frac{G I \text{ cub.}}{A C q}$   
 sunt  $\div \div$ . ergo  $G I$  est prima duarum inter  $A C$ , &  $\frac{D F \times L K}{N M}$  medi-  
 arum proportionalium.

Vides & hoc problema esse solidum, utpote quod desideret inven-  
 tionem duarum mediarum proportionalium; quâ suppositâ sic con-  
 struetur. <sup>a</sup>Fiant coni  $A K L, D M F$  pares datis portionibus  $A B C$ , <sup>a 3 hujus.</sup>

$D E F$ . sitque  $M N. K L :: D F. Z = \frac{K L \times D F}{M N}$ . & inter  $A C, Z$

reperiantur proportione mediæ  $G I$ , &  $X$ . Circa  $G I$  verò describa-  
 tur portio circularis  $G H I$  continens angulum  $G H I = \text{ang } D E F$ . <sup>b 33. 3.</sup>  
 erit portio  $G H I$ , quam quæris. Nam faciendo conum  $G O I$  parem  
 portioni  $G H I$ , quia portiones  $G H I, D E F$  <sup>c</sup>similes sunt, <sup>d</sup>erunt & <sup>c conf. r.</sup>  
 coni  $G O I, D M F$  similes. quare  $P O. G I^c :: M N. D F ::$  <sup>d le. m. frac.</sup>  $K L$ .  
 $Z$ . & permutando  $P O. K L :: G I. Z^f :: A C. X^b :: A C q. G I q.$  <sup>e 24 def. 11.</sup>  
 (<sup>h</sup>sc. ob  $A C, G I, X, Z \div \div$ ). itaque reciprocam habent coni  $G O I$ , <sup>f conf. & 16. 5.</sup>  
 $A C K$  basium & altitudinum proportionem; <sup>g 20. 6.</sup> ergo coni  $G O I, A C K$  <sup>h conf.</sup>  
 (hoc est portiones  $G H I, A B C$ ) æquantur.  $Q. E. F.$  <sup>k 15. 12.</sup>

### Prop. VII.

Datis duabus sphaera portionibus ( $A B C, D E F$ ) [sive ejusdem sive Fig. 58.  
 non] invenire sphaera portionem, quæ quidem datarum uni ( $D E F$ ) simi- 59.  
 lis erit, superficiem verò habebit alterius portionis ( $A B C$ ) superficiem 60.  
 parem.

*Analysis.* Sit portio  $G H I$  qualis exponitur. unde cum portio-  
 num  $G H I, A B C$  superficies æquantur, <sup>a</sup>erit circulus radio  $H I$  æqua- <sup>a 49. & 50. 1 h.</sup>  
 lis circulo ad radium  $B C$ ; & proinde  $H I = B C$ . Item ob simili-  
 tudinem superficialium  $D E F, G H I$ , erit  $E F. E R :: H I$  (vel  $B C$ ).  
 $H T$ : hinc Synthesis. Fac  $E F. E R :: B C. H T$ . & sit  $H T$  diame-  
 ter sphaeræ; & secetur  $H T$  in  $P$ , <sup>d 10. 6.</sup> ita ut sit  $H P. P T :: E N. N R$ , <sup>e conf. & cor.</sup>  
 & per  $P$  transeat planum  $G I$  ad  $H T$  rectum: liquet portionem  
 $G H I$  fore similem ipsi  $D E F$ ; & esse  $H I. H T^c :: E F. E R^f ::$  <sup>f conf.</sup>  
 $B C. H T$ . adeoque esse  $H I = B C$ . & idcirco circulum radio  $H I$  <sup>g 9. 5.</sup>  
<sup>h</sup>æquari circulo ad radium  $B C$ ; <sup>h 49. & 50. 1 h.</sup> hoc est superficiem sphaericam  
 $G H I$  superficiem  $A B C$ .  $Q. E. F.$

## Prop. VIII.

Fig. 61.

*A data sphæra (BVAD) plano abscindere portionem (BV C), ita ut portio ad conum (BV C) habentem eandem cum portione basim (BA) & æqualem altitudinem (VK) habeat rationem datam (X ad Y).*

a 3 hujus.  
b 14. 12.  
c const. & 7.5.

Quæsitæ portio sit BV A, & conus BV A; quibus axis communis VK; in quo protracto centrum sphære, C; ponatur autem conus BE A æqualis portioni BV A; <sup>a</sup> unde CD  $\vdash$  KD. KD :: EK. VK <sup>b</sup> :: con BE A. BV A <sup>c</sup> :: X. Y. dividendoque X—Y. Y :: CD. KD. unde componitur sic: fiat X—Y. Y :: CD. KD. (adeoque componendo erit X, Y :: CD  $\vdash$  KD.KD); per K verò transeat planum BA ad VD rectum; tuncque si fiat conus æqualis resectæ portioni BV A, erit EK. VK (<sup>a</sup> id est con BE A. con BV A) <sup>b</sup> :: CD  $\vdash$  KD. KD <sup>c</sup> :: Y. X. <sup>d</sup> adeoque port. BV A. con BV A :: Y. X. *Q.E.F.*

a 14. 12.  
b 3. hujus.  
c prius.  
d const. & 7.5.

## Lemma.

Sint utcumque A  $\sqsubset$  B, & C  $\sqsubset$  D. Erit A  $\vdash$  D. B  $\vdash$  D.  $\sqsubset$  A  $\vdash$  C. B  $\vdash$  C.

Nam A  $\times$ : C—D  $\sqsubset$  B  $\times$ : C—D; hoc est AC—AD  $\sqsubset$  BC—BD. & transponendo AC  $\vdash$  BD  $\sqsubset$  BC  $\vdash$  AD. ergo utrinque adiungendo AB  $\vdash$  CD, erit AC  $\vdash$  BD  $\vdash$  AB  $\vdash$  CD  $\sqsubset$  BC  $\vdash$  AD  $\vdash$  AB  $\vdash$  CD, <sup>a</sup> hoc est A  $\vdash$  D  $\times$ : B  $\vdash$  C  $\sqsubset$  B  $\vdash$  D  $\times$ : A  $\vdash$  C. <sup>\*</sup> quare A  $\vdash$  D. B  $\vdash$  D  $\sqsubset$  A  $\vdash$  C. B  $\vdash$  C.

a scb. 1. 2.  
\* scb. 16. d.

## Prop. IX.

Fig. 62.

*Si sphæra (BVAD) plano secetur non per centrum, major portio (BV A) ad minorem (BDA) rationem quidem habet minorem quam <sup>\*</sup>duplam ejus, quam habet majoris portionis superficies ad superficiem minoris; majorem verò quam sesquialteram.*

a 3 hujus.  
\* scb. 17. 6.  
b scb. 17. 6.  
c 5. 2.  
d 14. 5.  
e 3 k. & 16. 5.  
f prius & 15. 6.  
g — 5.  
h 8. 5.  
k sup. & 1. 6.

Sit conus BE A = port. BV A. & conus BFA = port. BDA. <sup>a</sup> quare CD  $\vdash$  KD. KD :: EK. VK. & dividendo CD. KD :: EV. VK <sup>b</sup>  $\sqsubset$  VK. CD (quia C Dq <sup>c</sup>  $\sqsubset$  KD  $\times$  VK) <sup>d</sup> ergo EV  $\sqsubset$  VK, & EV  $\times$  CD <sup>b</sup>  $\sqsubset$  VKq. <sup>e</sup> Est verò C D  $\vdash$  VK. KF <sup>f</sup> :: VK. KD :: EV. CD <sup>\*</sup>  $\sqsubset$  EV  $\vdash$  VK—CD  $\vdash$  VK (EK. CD  $\vdash$  VK). <sup>g</sup> ergo Qv: C D  $\vdash$  VK  $\sqsubset$  KF  $\times$  EK. & <sup>h</sup> proinde Q: C D  $\vdash$  VK. KFq  $\sqsubset$  KF  $\times$  EK. KFq. <sup>k</sup> hoc est VKq. K Dq  $\sqsubset$  EK. KF, hoc est

est <sup>1</sup> duplicata ratio superficierum BVA. BDA major est <sup>m</sup> ratione con- 13 cor. 50 huj.  
 norum BEA, BFA; vel portionum BVA, BFA. quod erat primum. m 14. 12.

Porro fiat  $Xq = EV \times CD \text{ p } \leftarrow V Kq$ ; & quia  $EV. X^q :: X.$  p supra.  
 $CD$ ; <sup>1</sup>erit  $EV \text{ p } \leftarrow X. X \text{ p } \leftarrow CD :: X. CD.$  <sup>s</sup>ergo  $Qu: EV \text{ p } \leftarrow X.$  q 17. 6.  
 $Qu: X \text{ p } \leftarrow CD :: Xq. CDq \text{ p } \leftarrow EV. CD.$  <sup>verum</sup>  $EV \text{ p } \leftarrow V.K.$  r 16. 8. 18 5.

$CD \text{ p } \leftarrow VK \text{ p } \leftarrow EV \text{ p } \leftarrow X. CD \text{ p } \leftarrow X.$  (quia  $\frac{EK}{EV \text{ p } \leftarrow CD}$  &  $X$  s 22. 6.  
 $\text{p } \leftarrow V.K$ ). ergo  $E Kq. Qu. CD \text{ p } \leftarrow V.K. \text{ p } \leftarrow EV. CD^x :: CD \text{ p } \leftarrow$  t 20. 6.  
 $V.K. K F.$  pone  $Z, CD \text{ p } \leftarrow V.K, Y, K F$  esse  $\div \div$ , ergo  $Zq. Qu: CD$  u lemm. præc.

$\text{p } \leftarrow V.K^x :: Z. Y^x :: CD \text{ p } \leftarrow V.K. K F^x \text{ p } \leftarrow E Kq. Qu: CD \text{ p } \leftarrow V.K.$  x supra.  
<sup>2</sup>quare  $Z \text{ p } \leftarrow E K.$  atqui ratio  $Z$  ad  $K F$  æsesquialtera est rationis  $CD$  y 16. 5.  
 $\text{p } \leftarrow V.K$  ad  $K F.$  Ergo ratio  $E K$  ad  $K F$  (hoc est coni  $BEA$  ad con- z 10. 5.

um  $BFA$ , <sup>d</sup> vel portionis  $BVA$  ad portionem  $BDA$ ) major est a const.  
 sesquialtera rationis  $CD \text{ p } \leftarrow V.K$  ad  $K F$ , <sup>x</sup> vel  $V.K$  ad  $K D$ , <sup>s</sup> hoc est c 8. 5.

superficie sphæricæ  $BVA$  ad  $BDA$ . ergo secundo quoque propo- y 14. 12.  
 situm constat. d const. 7. 5.

e 3 cor. 50 h.

### Prop. X.

*Sphæricarum portionum (ABC, DEF) sub æquali superficie con- Fig. 63,  
 tentarum maximum est hemisphærium (ABC).* 64.

Sint coni  $AGC, DHF$  æquales portionibus  $ABC, DEF$ . qua- a cor. 38. 1 h.  
 re  $KG^a = KA. b$  &  $EM \text{ p } \leftarrow LO. LO :: LH. LE.$  sit  $M$  centrum b 3 hujus.  
 sphære  $DEF$ , &  $EN = BK.$  ergo  $2ENq = 2KAq^c = BAq$  c 47. 1.  
 $d \text{ p } \leftarrow EDq^c = OE \times EL^f = 2EM \times EL$ ; quare  $ENq^s = EM$  d hyp. 1. 49  
 $\times EL.$  ergo  $EN$  media cadit inter puncta  $M, L$ ; unde  $EN \times NO$  vel 50 hujus.  
 $\text{p } \leftarrow EL \times LO.$  Additis igitur hinc inde æqualibus  $ENq$ , &  $EM \times$  e cor. 8. 17 6.  
 $EL$ ; erit  $EN \times EO$  (<sup>k</sup> hoc est  $EN \times NO \text{ p } \leftarrow ENq$ )  $\text{p } \leftarrow EL \times$  f const. 1. 2.  
 $LO \text{ p } \leftarrow EM \times EL^i = LH \times LO.$  <sup>m</sup> ergo  $EN. LH \text{ p } \leftarrow LO. EO$  g 6. ax. 1.  
 $o :: ODq. EOq^p :: DLq. EDq^q :: DLq. 2KAq.$  & antecedentes h cor. 5. 2.  
 duplicando  $2EN (KG).$   $LH \text{ p } \leftarrow 2DLq. 2KAq^r :: DLq. KAq.$  Po- k 3. 2.  
 natur igitur  $KZ. LH :: DLq. KAq.$  <sup>s</sup>eritque  $KZ \text{ p } \leftarrow KG$ ; <sup>t</sup> & ideo l supra 16. 6.  
 conus  $AZC \text{ p } \leftarrow$  conus  $AGC.$  <sup>u</sup> hoc est conus  $DHF$  minor cono m sch. 16. 6.  
 $AGC$ , <sup>x</sup> vel portio  $DEF$  minor portione  $ABC.$  *Q.E.D.* n cor. 8 et 20. 6.

p cor. 8. et 22 6.  
q supra 7. 5.  
r 15. 5.  
s 10. 5. t 14. 12. 14. 5. u 15. 12. x const.



## De CIRCULI Dimensione.

### Lemma.

Fig. 65.

**P**olygonum ordinatum  $GHIKLM$  circulo circumscriptum æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò radius  $NP$ .

Nam radius  $NP$  ad contactum ductus tangenti  $GH$  perpendicularis est; & si ductis rectis  $NG, NH, NI, NK, NL, NM$  polygonum resolvatur in triangula, erit radius  $NP$  communis omnium altitudo, <sup>a</sup> proindeque triangula ipsa æqualia erunt; <sup>a</sup> ergo triangulum basin habens parem summæ laterum  $GH, HI, IK$  &c. altitudinem verò  $NP$  æquabitur illis omnibus, hoc est toti polygono circumscripto.

a 1. 6.

Similiter polygonum  $ABCDEF$  inscriptum circulo æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò perpendicularis  $NO$  è centro in unum aliquod latus ducta.

### Prop. I.

In fig. traced.

Fig. 66.

*Omnis circulus (N) æqualis est triangulo (QRS), cujus radius (NP) æqualis est uni lateri (QR) circa rectum angulum, perimeter verò basi (RS).*

b 1. 1. de sph.

& cyl.

Si negas sit primò triang  $QRS \supset \odot N$ . Circulo  $N$  <sup>a</sup> inscribatur polygonum ordinatum  $ABCDEF$ , ita ut  $\odot N$  — polyg  $ABCDEF \supset \odot N$  — triang  $QRS$ ; quare polyg  $ABCDEF \subset$  triang  $QRS$ , & quoniam ambitus polygoni <sup>b</sup> minor est perimetro circuli, hoc est ipsâ  $RS$ , sit ei æqualis  $RT$ ; & connectatur  $QT$ ; cum itaque sit  $RQ \subset NO$ , <sup>c</sup> erit polyg  $ABCDEF \supset$  triang  $QRT \supset QRS$ . verùm erat polyg  $ABCDEF \subset$  triang  $QRS$ , quæ repugnant.

c lemm. præc.

d 2. 1. de sph.

& cyl.

Sin velis esse triang  $QRS \subset \odot N$ ; circulo circumscribatur polygonum  $GHIKLM$  <sup>a</sup>  $\supset$  triang  $QRS$ ; <sup>d</sup> ejus perimeter circuli perimetro major est, sit æqualis  $RV$ , & connectatur  $QV$ ; <sup>e</sup> ergo polyg  $GHIKLM =$  triang  $QRV \subset$  triang  $QRS$ ; at erat polyg  $GHIKLM \supset$  triang  $QRS$ , quæ repugnant.

Ergo



Ergo potius circulus triangulo  $Q R S$  æquatur;  $\mathcal{Q}$ .  $E. D.$

Brevius. Circulus est quali polygonum ordinatum infinitilaterum, in quo radius est perpendicularis ad latera, peripheria verò summa laterum; unde constat è præmissis lemmate propositum.

*Coroll.* Si circumferentia dicatur  $\omega$ , diameter  $d$ , radius  $r$ , erit  $\odot =$

$$\frac{r\omega}{2} = \frac{\omega}{d} rr.$$

*Lemma.* Sit  $A. B \sqsubset C. D$ ; &  $B = D$ ; erit  $A \sqsubset C$ . Nam sit  $a 10. 5$ .  
 $A. E :: C. D$ .  $\therefore$  ergo  $E \sqsubset B$ ; hoc est  $E \sqsubset D$ ;  $\therefore$  quare  $A \sqsubset C$ .  $b 14. 5$ .

### Prop. II.

*Omnis circuli perimeter ( $\omega$ ) tripla est diametri ( $AD$ , vel  $d$ ), & præterea excedit minori quidem quàm  $\frac{1}{7}$  (vel  $\frac{1}{70}$ ), majori verò quàm  $\frac{1}{71}$  diametri.*

#### Pars prima.

Dico fore  $\omega. d \supset 3\frac{1}{7}. 1$ . Ducatur tangens  $AD$ ; sitque  $\frac{2}{3} \text{ rect} = \angle ACD = 2 \angle ACE = 4 \angle ACF = 8 \angle ACH = 16 \angle ACK$ . quare  $2 \text{ ang } ACK = \frac{1}{9} 4 \text{ rect}$ ; unde  $2 AK \times 96$  est ambitus polygoni circulo circumscriptibilis, circulo circumferentia major; itaque si  $2 AK \times 96 \supset 3\frac{1}{7} AB$ , \* liquet \*  $8. 5$ . hæc pars; id verò sic ostenditur:

Ob  $\text{ang } ACE = \frac{1}{3} \text{ rect}$ , est  $CE^a = 2EA$ ; & ob  $\text{ang } ACE = \frac{1}{3} \text{ cor. } 12. 13$ .  
 $= 2ACF$ , est  $CE.CA^b :: EF.FA$ ; & componendo  $CE + CA^b :: EA.FA$ ;  
 $CA.CA :: EA.FA$ ; permutandòque  $CE + CA.EA :: EA.FA$ ;  
 simili discursu est

$$\left. \begin{array}{l} CF \\ CG \\ CH \end{array} \right\} \vdash CA. \left. \begin{array}{l} FA \\ GA \\ HA \end{array} \right\} :: CA. \left. \begin{array}{l} GA \\ HA \\ KA \end{array} \right\}$$

Ponatur  $CE = 306$ ; quare  $EA = 153$ ; ac  $CA (\sqrt{CEq} - c 47. 1$   
 $E A q) = \sqrt{93636 - 23409} = \sqrt{70227} \sqsubset \sqrt{70225} = 265$ .  $d 8. 5$ .  
 $50571 (306 + 265) \cdot 153 \cdot \supset CE + CA.EA :: CA.FA$ ;  
 itaque posito  $FA = 153 = \sqrt{23409}$ ,  $\therefore$  erit  $CA \sqsubset 571 = \sqrt{c \text{ lemm. } 11. \text{æc.}}$   
 $326041$ ; adeòque  $CFq \sqsubset 23409 + 326041 = 349450$ ;  
 $349428 \frac{42}{64} = q. 591\frac{1}{8}$ .

Hinc  $1162\frac{1}{8} (591\frac{1}{8} + 571) \cdot 153^d \supset CF + CA.FA :: CA.GA$ ;  
 quare posito jam  $GA = 153$ ,  $\therefore$  erit  $CA \sqsubset 1162\frac{1}{8} = \sqrt{1350534 \frac{33}{64}}$ ;  
 & ideo  $CGq \sqsubset 23409 + 1350534 \frac{41}{64} = 1373943 \frac{31}{64} \sqsubset 1373720 \frac{42}{64} = q. 1172\frac{1}{8}$ .

Igi-

f 15. 5.

Igitur  $2334\frac{1}{4}$  ( $1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}$ ).  $153^d \rightarrow CG \perp CA. GA ::$   
 $CA. HA$ ; ergo si rursus ponatur  $HA = 153$ ;  $^c$ erit  $CHq \sqsubset$   
 $q. 153 \perp q. 2334\frac{1}{4} = 23409 \perp 5448723\frac{1}{6} = 54721321\frac{1}{6}$   
 $\sqsubset 5472028\frac{1}{6} = q. 2339\frac{1}{4}$ . Itaque denuo  $4673\frac{1}{2}$  ( $2339\frac{1}{4} \perp$   
 $2334\frac{1}{4}$ ).  $153^d \rightarrow CH \perp CA. HA :: CA. KA$ ; ergo si ponatur  $KA$   
 $= 153$ ,  $^c$ erit  $CA \sqsubset 4673\frac{1}{2}$ ; quare  $AB. 2KA \sqsubset 4673\frac{1}{2}. 153$ .  
 vel inversè  $2KA. AB \rightarrow 153. 4673\frac{1}{2}$ .  $^f$ ergo  $94 \times 2KA. AB \rightarrow$   
 $94 \times 153. 4673\frac{1}{2}$ ; hoc est  $\rightarrow 14688. 4673\frac{1}{2} \rightarrow 14688\frac{6}{7}. 4673\frac{1}{2} ::$   
 $3\frac{1}{7}. 1$ . quare liquet prima pars.

## Pars secunda.

\* 8. 5.

Fig. 59.

h 3. 6.

k 4. 6.

l 27. 3.

Dico fore  $\theta. \delta \sqsubset 3\frac{6}{71}$ . 1. Sit  $\frac{1}{6} \theta = \text{arc } AD = 2 \text{ arc } AE =$   
 $4 \text{ arc } AF = 8 \text{ arc } AG = 16 \text{ arc } AH$ ; quare  $AH = \frac{1}{96} \theta$ ; unde  
 $96 AH$  est ambitus inscriptibilis polygoni perimetro circuli minor;  
 quòd si igitur sit  $94 AH. AB. \sqsubset 3\frac{6}{71}$ . 1; \* liquebit fore magis  $\theta. \delta$   
 $\sqsubset 3\frac{6}{71}$ . 1. illud verò sic constat.

Ducantur rectæ  $BD, BE, BF, BG, BH$ ; &  $AD, AE, AF, AG,$   
 $AH$ ; & ob ang  $ABD = 2 ABE$ , est  $DB. BA^h :: DX. KA$ , &  
 componendo  $DB \perp BA. BA :: DA. KA$ ; permutandòque  $DB$   
 $\perp BA. DA :: BA. KA^k :: BE. EA$ . (nam ob<sup>l</sup> similia triangula  
 $EBA, EAK$  est  $BA. KA^h :: BE. EA$ ).

Simili discursu est  $EB \rangle E A. BF. FA.$   
 $FB \rangle \perp BA. FA :: BG. GA.$   
 $GB \rangle GA. BH. HA.$

m 8. 5. !

n lemm. frac.

Sit  $BA = 1560$ . ergo  $CA (DA) = 780$ ; &  $DBq (BAq -$   
 $ADq) = 1825200 \rightarrow 1825201 = q. 1351$ .  $^m$ ergo  $2911) 1560$   
 $+ 1351). 780 \sqsubset DB \perp BA. DA :: BE. EA$ ; quare si ponatur  
 $EA = 780$ ,  $^n$ erit  $BE \rightarrow 2911$ ; &  $BAq (BEq \perp EAq) \rightarrow$   
 $9082321 \rightarrow q. 3013\frac{1}{2}$ .

$^m$  Quare  $5924\frac{1}{2} (2911 + 3013\frac{1}{2}). 780$ . (hoc est  $1823. 240$ )  
 $\sqsubset EB \perp BA. EA :: BF. FA$ ; unde si  $FA$  ponatur  $240$ ,  $^n$ erit  
 $BF \rightarrow 1823$ . &  $BAq (FAq \perp BFq) \rightarrow 3380929 \rightarrow q.$   
 $1838\frac{1}{11}$ .

Unde iterum  $3661\frac{1}{11} (1823 + 1838\frac{1}{11}). 240$  (hoc est  $1007.$   
 $66$ )  $^m \sqsubset FB \perp BA. FA :: BG. GA$ ; quare posito  $GA = 66$ ,  
 $^n$ erit  $BG \rightarrow 1007$ ; &  $BAq (GAq + BGq) \rightarrow 1018405 \rightarrow q$   
 $1009\frac{1}{6}$ .

Itaque denuo  $2016\frac{1}{6} (1007 + 1009\frac{1}{6}). 66$   $^m \sqsubset GB \perp BA.$   
 $GA :: BH. HA$ ; unde si ponatur  $HA = 66$ ,  $^n$ erit  $BH \rightarrow 2016\frac{1}{6}$ ;  
 &  $BAq (HAq \perp BHq) \rightarrow 4069284\frac{1}{36} \rightarrow q. 2017\frac{1}{4}$ . ergo  $BA.$   
 $AH$

# De Circuli Dimensione.

41

AH  $\rightarrow$  2017 $\frac{1}{4}$ . 66; vel inversè AH. BA  $\leftarrow$  66. 2017 $\frac{1}{4}$ . <sup>p</sup> quare p 15. 5.  
 96 AH. BA  $\leftarrow$  94  $\times$  66. 2017 $\frac{1}{4}$  (hoc est, 6336. 2017 $\frac{1}{4}$  :: 3 $\frac{1}{8}$  8 $\frac{1}{2}$  7 $\frac{1}{2}$ .  
 1.) quare 96 AH. BA  $\leftarrow$  3 $\frac{1}{8}$  8 $\frac{1}{2}$  7 $\frac{1}{2}$  1  $\leftarrow$  3 $\frac{1}{7}$  1. unde constat propo-  
 situm.

Coroll. Hinc  $\pi$ . d :: 22. 7, ferè.

## Prop. III.

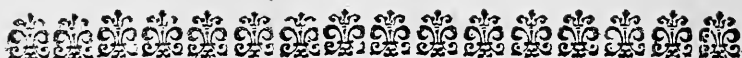
Circulus ad suæ diametri quadratum rationem habet eandem (ferè),  
 quam 11 ad 14.

Nam  $d^a$ .  $d^b$  ::  $\pi$ . d :: 22. 7. ergo  $\frac{d^a}{d^b}$  ( $\odot$ ).  $d^a$  ::  $\frac{22}{7}$  ::  $\frac{44}{7}$ . 14 <sup>a. l. 6.</sup>  
 (hoc est) :: 11. 14. <sub>b cor. 2. huj.</sub>

Cyclometriam longius, & ad majorem ~~invenitur~~ promovit poste-  
 riorum industria. Consulantur *Viète*, *Ludolphi à Cenlen*, *Metii*,  
*Snellii*, *Hugenii* lucubrationes: ad crassiores saltem usus sufficit hæc  
*Archimeden* Circuli dimensio.

G

De



## De SPIRALIBUS, seu HELICIBUS.

*Archimedes Dositheo S.*

**T**heorematum ad Cononem transmissorum, pro quibus assidue literis à me contendis ut demonstrationes conscribam, plerorumque quidem scriptas habes in iis quas *Heraclides* pertulit; ipforum verò quædam etiam in hoc libello scriptas ad te mitto. Nè mire-  
ris autem, quòd post diutiorem temporis moram eorum demonstrationes edimus. Hoc enim accidit fieri, quia priùs voluerim iis exhibere, qui in Mathematicis occupantur, & ea libenter perscrutari volunt: \* quales enim in *Geometria* speculationes, non bene tractabiles initio vi-  
sæ, tempore elaboratæ perfectiorem accipiunt: *Conon* certè non sufficiens ipforum inquisitioni tempus nactus vitam commutavit, obscuritate involuta relinquens; cum & hæc omnia reperisset, & alia multa peruestigasset, longiusque promovisset *Geometriam*: scimus enim in illo fuisse non mediocrem Mathematicum peritiam, nec non industriam eximiam: à *Cononis* autem excessu cùm anni plures effluxerint, Problematum nullum à quovis percepimus sollicitari. Volo autem eorum unumquodque singillatim producere \* \* \* ut redarguantur qui præ se ferunt omnia invenisse, nullam proferentes eorum de-

vel quot: forte  
legendum π'σπ  
pro π'ιζ.

Hic in edi-  
tis libris inter-  
feruntur hæc

verba: κ' γδ συμβαίνει δύο πνὰ τῶν ἐν αὐτῷ μέν κεχρησμένα· τέλος δὲ ποτ' ἔσται. quorum mentem assequi nequeo. Locus proculdubio, mendosus & mutilus: è conjectura sic interpolata red-  
derem: lego κ' γδ Συμβαίνει δύο πνὰ τῶν ἐν αὐτῷ εἶναι κεχρησμένα· τέλος δὲ ποτ' ἔσται. Contigit enim duo quædam eorum quæ in illo (*Cononis* scripto) separatim apposita sunt, falsa esse; \* ποτ'δε το περσίδει, vel περσίδειν. Habetur apud *Theocr. Idyl. 14 v. 45. imò infra hic. prop. 4.* quæ quidem ultimò in fine proponemus, ut &c.

monstrationem, \*interdumque quæ impossibilia sunt <sup>\*α' πoθ', lego οi πoθ'.</sup> profitentes invenisse: hæc autem quænam Problemata sunt; & \*quorum missas habes demonstrationes; & quæ <sup>\*π'νων α' v, de- leo ω'.</sup> nam in hoc libro perlata comprobamus, tibi declarabo. Primum itaque Problematum fuit: Sphærâ datâ, spatium planum invenire spheræ superficiei æquale: quod quidem primò manifestum evasit edito de Sphæra libro; quippe cùm ostensum sit, quòd omnis spheræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in spherâ; liquet quomodo possibile sit invenire planum spatium æquale superficiei spheræ. Secundum verò: Dato cono vel cylindro, spheram invenire æqualem cono vel cylindro. Tertium verò: Datam spheram plano secare, ita ut ejus portiones inter se præstitutam habeant rationem. Quartum autem: Datam spheram plano secare, ita ut superficiei portiones assignatam inter se rationem habeant. Quintum verò: Datam spheræ portionem datæ spheræ portioni assimilare. Sextum verò: duabus spheræ, seu ejusdem seu dèversa, portionibus datis, invenire spheræ portionem quandam, quæ sit ipsa quidem uni segmentorum similis, superficiem verò æqualem habeat superficiei alterius portionis. Septimum: A data spheræ portionem refecare plano, ita ut portio ad conum basin habentem eandem cum portione, & altitudinem æqualem præstitutam habeat rationem, non majorem illa, quam habent tria ad duo. Horum quidem modò dictorum omnium demonstrationes pertulit Heraclides. Quod autem post hæc separatim appositum: falsum erat; est autem hujusmodi: Si spherâ plano secetur in inequalia portio major ad minorem duplicatam habet rationem ejus, quam habet major superficies ad minorem. Quod verò hoc falsum sit, ex antea missis manifestum est. Quin seorsim istis adscriptum erat & hoc: Si spherâ plano secetur inequaliter, ad rectos diametro cuidam ex iis qui in spherâ, portio major ad minorem eandem obtinebit rationem, quam diametri pars major ad minorem: major enim portio spheræ ad minorem habet

9 II. de sph.

Ibid.

bet minorem quidem quàm duplicatam rationem ejus quam habet major superficies ad minorem, majorem verò quàm sesquialteram. Erat verò sepositorum problematum ultimum etiam falsum: quòd, si sphaera alicujus diameter secetur, ita ut quod à majori segmento sit quadratum triplum sit quadrati, quod à segmento minori, perque sectionis punctum actum planum diametro perpendiculare sphaeram secet, erit talis specie figura, qualis est maior sphaerae portio, maxima portionum quarumvis aliarum aequalem habentium superficiem. Quòd autem hoc sit falsum, constat ex antea missis theorematibus: etenim demonstratum est, quòd hemisphaerium maxima est portionum, sub equali comprehensarum superficie. Post hæc verò de cono proposita sunt & hæc: si rectanguli coni sectio manente diametro circumvolvatur, ita ut diameter sit axis; à rectanguli coni sectione descripta figura vocetur *Conoides*; & si conoideam figuram planum contingat; plano verò contingenti ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abscindat, abscissæ quidem portionis basis appelletur planum abscindens, vertex verò punctum, ad quod aliud planum *conoides* tangit. Quinetiam si dicta figura plano secetur ad axem recto, quod sectio quidem circulus erit perspicuum est; Quòd verò resecta portio sesquialtera erit coni basin habentis eandem cum portione, & aequalem altitudinem, demonstrare oportet. Ac si *Conoidis* duæ portiones planis resecantur utcunque ductis, quòd equidem sectiones erunt *oxygoniorum conorum* sectiones, patet; siquidem resecantia plana non sint ad axem recta: quòd verò portiones hanc inter se rationem habent, quam potentiâ inter se habent quæ ab ipsarum verticibus ducuntur axi parallelæ usque ad secantia plana, demonstrandum est. Horum autem demonstrationes \*ita tibi mandantur: post ista verò de *Helice* proposita fuerunt hæc. Est verò quasi genus aliud problematum, \*nihil habens commune cum prædictis: de

vid. 26.

\*Ερω. forte  
subest aliquid  
errati.

\*lego ἐμικαίων  
ἡλικύτα pro  
ἐμικαίων, ἡλικύτα.

de quibus in hoc ipso libello demonstrationes tibi conscripsi. Sunt autem hæc: [illa subjungit, quæ habentur infra in Prop. 24. 18. 27. 28.] Horum à me, & aliorum de Helice demonstrationes in hoc libello scribuntur.

**P**Ræmittuntur autem, sicut & aliis Geometricis, \*quæ usum habent ad ipsorum demonstrationem. Assumo verò & in his, ex iis quæ in libris extant antehac editis, hæc lemmata. \*Inæqualium linearum &c.

*monstrationsi præstratæ. \* Vide 5. ax. libri I. de sph. & cyl.*

### Prop. I.

Si in aliqua linea (A G) feratur punctum quoddam æquè sibi ipsi velociter latum, & sumantur in illa due lineæ (A B, B G); sumptæ eandem inter se rationem habebunt, quam tempora, in quibus punctum rectas transierit.

Fig. 69.  
70.

Tempora repræsententur à rectis  $\alpha\beta, \beta\gamma$ . & \*sumantur B M, B N \* post. utunque multiplices rectarum B A, B G; &  $\beta\mu, \beta\nu$  pariter multiplicita temporum  $\beta\alpha, \beta\gamma$ : & quia motus æquè veloces sunt, erit  $\beta\mu$  a hyp. tempus motûs continuati per B M; &  $\beta\nu$  tempus motûs per B N. Quod si recta B M major sit rectâ B N, liquet (ob motûs suppositam *ισοτάχην*) esse tempus  $\beta\mu$ , quo peragitur B M, majus tempore  $\beta\nu$ , quo peragitur B N; & simili ratione si B M = B N, esse corresponden-

ter  $\beta\mu = \beta\nu$ . <sup>d</sup> unde erit A B. B G ::  $\alpha\beta. \beta\gamma$ . *Q. E. D.*

d 5 def. V.

### Prop. II.

Si duorum punctorum utroque secundùm lineam quandam, non per unam eandem, æquè sibimet velociter lato; sumantur in utraque linea due lineæ (A B, B C, & L M, M N) & tum primæ (A B, L M) in æqualibus temporibus a punctis transigantur, tum etiam secundæ (B C, M N); eandem inter se rationem habebunt sumptæ lineæ.

Fig. 71.  
72.

Lationis per A B, & L M tempus sit X; & lationis per B C, M N tempus sit Y; estque A B. B C :: (X. Y ::) L M. M N. *Q. E. D.* a 1 hujus. Prop.

## Prop. III.

*Datis quotlibet circulis, recta sumi potest major circumferentiis circulo-  
rum.*

a per aliquam  
4 ii elem.

b 2.1. de sph.

Circulis <sup>a</sup>circumscribantur polygona quævis, <sup>b</sup> liquet rectam eorum  
perimetris æqualem circulo- rum excedere circumferentias,

## Prop. IV.

*Datis duabus lineis inæqualibus recta (R) & circuli circumferentia  
(P), sumi potest recta, minor quidem datarum linearum majore, ma-  
jor autem minore.*

a 5 ax. 1. de sph.

b conftr.

c 7 ax. 1.

d 4. ax. 1.

e 5. ax. 1.

Hoc è quantorum homogeneitate, & adeò ab excessûs divisibilitate  
fatis perspicuum est. Sed cum auctore, sit alterutra R major, & ex-  
cessus R—P multiplicatus per aliquem numerum N <sup>a</sup>excedat R. Erit

$R - \frac{R}{N} \subset P$ . Nam quia  $R - P \times N \supset R$ . <sup>c</sup>erit  $R - P \subset \frac{R}{N}$  ergo

transponendo  $R \supset \frac{R}{N} + P$ . <sup>c</sup> &  $R - \frac{R}{N} \subset P$ . Q.E.F.

## Prop. V.

Fig. 73.

*Dato circulo, & recta (B T) tangente circum-  
ferentiam, potest à circuli cen-  
tro (A) duci recta (A T) ad tangentem, ita ut à tangente & circuli cir-  
cumferentia intercepta recta (D T) ad radium (A D) minorem ratio-  
nem habeat, quàm circuli arcus (B D) qui est inter contactum (B) & e-  
ductam (A T) ad datam quamcunque circuli circumferentiam (P).*

a 3 hujus.

Fig. 74.

Accipiatur recta quapiam X <sup>a</sup>major quàm P; & agatur diameter  
NM ad B T parallela, cui occurrat recta B D secans circum-  
ferentiam in D, ita ut intercepta D F major sit quàm X (id quod fieri potest, quoniam  
sic interceptæ ab M versùs partes F crescunt ad infinitum). Jam tra-  
jectâ A T per D, dico factum. Nam T D. D A ( <sup>a</sup>:: B D. D F <sup>b</sup>—  
<sup>c</sup> const. & 8. 5. arc B D. D F <sup>c</sup>— arc B D. X ) <sup>c</sup>— arc B D. P.

a 4. 6.

b 1. ax. 1. de sph.

c 8. 5.

c const. & 8. 5.

## Prop. VI.

Fig. 75.

*Dato circulo, & in circulo recta (Z D) quæ sit minor diametro, po-  
test à circuli centro (A) ad peripheriam projici recta (A G) secans da-  
tam*



tam in circulo rectam (ZD), ita ut recta (GH) inter peripheriam & rectam in circulo datam comprehensa ad conjunctam (GZ) à termino (G) projecta, qui est in peripheria ad alteram extremitatem (Z) data in circulo recta, præstitutam habeat rationem (R ad S); modò tamen data ratio minor sit ea, quam habeat dimidia (ZE), data in circulo ad ductam è centro ipsi perpendicularem (AE).

Ducatur diameter NM ad DZ parallela, cui occurrat tangens ZS, a 29. 1.  
 & connectatur AZ; & ob angulos AZE, ZAS<sup>a</sup> paret, & <sup>b</sup> rectos <sup>b hyp</sup> & 16. 3.  
 ZEA, AZS, erunt triangula ZEA, AZS similia. <sup>c</sup> unde AZ. <sup>c 4. 6.</sup>  
 ZS :: ZE. AE <sup>d</sup>  $\hookrightarrow$  R. S. fiat R. S :: AZ. X; <sup>e</sup> ergo X  $\hookrightarrow$  ZS. Igi- <sup>d hyp.</sup>  
 tur si per Z (quod fieri posse \*constat) transeat recta, secans circum- <sup>e 10. 5.</sup>  
 in G; sic ut inter diametrum & G intercepta GK æquetur ipsi X (se- <sup>\* Id nos alibi,</sup>  
 cabit autem ad partes D, quia GK  $\hookrightarrow$  ZS, & angulum SZM nulla <sup>quo modo fieri</sup>  
 secet major quam SZ); & connectatur AG; quoniam GH.GZ <sup>possit, ostendi-</sup>  
 :: <sup>c</sup> GA(ZA). GK  $\therefore$  Z A. X <sup>e</sup> R. S <sup>b</sup> :: GH. GZ, constat proposi- <sup>mus.</sup>  
 tum. \* <sup>f const. & 7. 5.</sup>  
<sup>g constr.</sup>  
<sup>h 11. 5.</sup>

\* scd. ad 6. Vides conditionem apponi merito: nam si esset GH. GZ (vel GA. GS) :: R.S :: ZE. AE :: ZA. ZS. essent GS, ZS æquales; q. f. n.

## Prop. VII.

Isdem datis, & recta (DZ) protracta potest è centro recta (AH) Fig. 75.  
 educi, ita ut quæ (GH) fuerit inter peripheriam & protractam ad con-  
 junctam (GZ) à termino intercepta ad terminum protracta propositam  
 habeat rationem (R ad S), dummodo data ratio major fuerit eâ, quam  
 habet dimidia (ZE) data in circulo ad ductam è centro ipsi perpendi-  
 cularem (AE).

Ducatur enim tangens ZS, & connectatur AZ, & cætera ut in a 4. 6.  
 præcedenti. Estque ZA. ZS <sup>a</sup> :: ZE. AE <sup>b</sup>  $\hookrightarrow$  R. S. fiat R. S :: ZA. <sup>b hyp.</sup>  
 X; erit ideo X  $\hookrightarrow$  ZS. itaque ducatur ZK, ita ut interceptur GK <sup>c const. & 7. 5.</sup>  
 = X (quod constat fieri posse intra angulum AZS) estque GH. GZ <sup>d const.</sup>  
 :: AG(AZ). GK  $\therefore$  AZ. X <sup>d</sup> :: R. S :: <sup>e</sup> GH. GZ. ergo factum. <sup>e 11. 5.</sup>

## Prop. VIII.

Dato circulo, & in circulo recta (ZD) quæ minor diametro, & aliâ Fig. 76.  
 (ZS) tangente circumum ad in circulo datæ terminum (Z), potest à cir-  
 culi centro (A) projici recta quedam (AL), ita ut pars ejus (HG) ac-  
 cepta inter circumferentiam circuli, ac datam in circulo rectam ad  
 partem

partem (LZ) à tangente interceptam habeat propositum rationem (R ad S); siquidem data ratio sit minor eâ quam habet semissis (ZE) data in circulo ad ductam è circulo ipsi perpendicularem (AE).

a 4. 6.

b hyp.

c 10. 5.

d 5. 4.

e 4. 6.

f 16. 6.

g 35. 3.

h 7. 5.

k 1. 6.

l const. &amp; 7. 5.

m 35. 3. &amp; 16.

6.

n 7. 5.

o 11. 5.

p 19. 5.

q const.

Sit diameter NM ad DZ parallela, tangenti LZ occurrens in S; fiatque R. S :: AZ. ZT. unde cum sit AZ. ZS<sup>a</sup> :: ZE. AE<sup>b</sup> ⇒ R. S. erit ZT = ZS. Per puncta A, S, T<sup>d</sup> ducatur circulus, quem fecit AZ producta in Y, ducaturque AX, sic ut LX = ZY (quod fieri posse constat ad alteras partes diametri AP, transeuntis inter Z, T; ob ZT = ZS, & angulum AZT rectum) hæc autem (AX) tangentem fecit in L, circulum primò positum in G, rectam ZD in H. Dico factum.

Nam LA. HA :: LS. ZS. unde LA × ZS = HA × LS. Item LT × LS<sup>e</sup> = LA × LX. quare LT × LS. HA × LS (= LT. HA) :: LA × LX. LA × ZS<sup>k</sup> :: LX. ZS<sup>l</sup> :: ZY. ZS<sup>m</sup> :: ZT. ZA<sup>n</sup> :: ZT. AG. o :: LT. HA<sup>p</sup> :: ZT = LT. AG = HA (hoc est) :: LZ. GH. ac invertendo GH. LZ :: (ZA. ZT<sup>q</sup> ::) R. S. Q. E. F.

## Prop. IX.

Fig. 77.

Isdem datis, ac in circulo datâ lincâ (DZ) protractâ, potest è centro circuli ad protractam educi recta (AH); ita ut qua (GH) est inter peripheriam & productam ad interceptam (LZ) ex tangente ad contactum, præsignatam sortiatur rationem (R ad S), si modo data ratio major sit eâ, quam habet data in circulo semissis (ZE) ad ductam ipsè è centro perpendicularem (AE).

Construitur & demonstratur eodem prorsus modo quo præcedens; tantum hic faciendo AZ. ZT :: R. S, evadit ZT = ZS; & inde recta AH occurrit circulo infra tactum ad partes S. quid plura?

Vides in duobus his problematis desiderari, ut intercipiatur LX = ZY, id quod præstari potest ope primæ conchoidis, cujus polus A, chorda ST, sagitta ZY; ejus enim cum circulo AST intersectio determinabit punctum X. at per conicas quoque sectiones idem effici potest, utpote solidum Problema.

## Prop. X.

Fig. 78.

Si lineæ quotcunque ponantur deinceps aquali sese excedentes (a, b, c, d, e, f) fuerit autem excessus aqualis minima (a); & aliæ lineæ ponantur, multitudine quidem æquales illis, magnitudine verò singulæ æquales

quales maxima (f); quadrata ab æqualibus maximæ a-  
 summentia quadratum ex maxima, & comprehensum (rectan-  
 gulum) à minima & æquali omnibus sese æqualiter exce-  
 dentibus, tripla erunt omnium quadratorum ab illis, quæ sese  
 excedunt.

$$\begin{array}{l} 7ff + fa + ea + da + \\ ca + ba + aa = 3aa \\ + 3bb + 3cc + 3dd \\ + 3ee + 3ff. \end{array}$$

Clariùs forsàn & brevius exprimatur, si sit quæcunque series æ-  
 qualiter se continuò excedentium, incipiens à puncto (seu nihilo) in-  
 clusivè, tripla summa quadratorum ex his adæquabitur summæ qua-  
 dratorum è totidem æqualibus maximæ, unà cum rectangulis è mini-  
 ma in omnes.

Nam summa quadratorum è tot æqualibus <sup>m</sup> maximæ est.

m 4. 2.

$$\begin{array}{l} \text{ff} \\ \circ a. b. c. d. e. f \quad aa + ee + *1ae (*2ae. \\ \circ 1. 2. 3. 4. 5. 6. \quad bb + dd + *2bd (*4ad. \text{ ob } b = 2a. \\ 6. 5. 4. 3. 2. 1. c. \quad cc + cc + *2cc (*6ac. \text{ ob } c = 3a. \\ \quad dd + bb + *2db (8ab. \text{ ob } d = 4a. \\ \quad ee + aa + *1ea (10aa. \text{ ob } e = 5a. \end{array}$$

Item  $ff^* = 6af + af + 2ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ff.$

Similiq; discursu,  $ae + 2ad + 2ae + 2ab + 2aa = ee$   
 $ad + 2ac + 2ab + 2aa = dd \quad * \text{ ob } f = ba.$   
 $ac + 2ab + 2aa = cc \quad + \text{ ob } 5f = 2e + 2d +$   
 $ab + 2aa = bb \quad | \quad 2c + 2b +$   
 $aa = aa. \quad 2a.$

n 1. 2.

Horum summa est,  $af + 3ae + 5ad + 7ac + 9ab + 11aa.$

Quæ quidem summa excedit summam rectangulorum supra positam  
 per  $af + ae + ad + ac + ab + aa.$  quod si igitur adjiciatur hic exces-  
 sus summæ quadratorum supra collocatæ, perspicuum est constari  
 $3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff.$  Consimilis discursus cuilibet  
 accommodari possit linearum multitudini.

### Corollaria.

1. Itaque constat hinc quòd omnia quadrata ab æqualibus maxi-  
 mæ eorum quæ ab æqualiter sese excedentibus minora sunt, quàm  
 tripla.

2. Reliquorum verò dempto maximæ quadrato majores sunt  
 quàm tripla, hoc est esse  $6ff \leftarrow 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee,$   
 quia scilicet  $ff = 6af \leftarrow af + ae + ad + ac + ab + aa,$  adeoque ex su-  
 periore æquatione hinc auferendo  $ff + af + ae + ad + ac + ab + aa,$   
 H illinc

illinc  $2ff$  remanebit  $6ff - 3aa + 3bb + 3cc - 3dd + 3ee + ff$ .

3. Quinetiam ideo si similes figuræ describantur, tum ab omnibus sese æqualiter excedentibus, tum ab æqualibus maximæ; figuræ ab æqualibus maximæ minores quidem erunt quàm triplæ earum, quæ ab æqualiter sese excedentibus, reliquarum verò demptâ figurâ quæ fit à maxima majores quàm triplæ: nam quadratorum & similium figurarum eadem prorsus est ratio.

*Schol.* Hinc pro cognoscenda quadratorum cujuscunque progressionis Arithmeticæ summa regulæ emergunt notatu dignæ.

1. Si series incipiat ab 0, primusque post 0 terminus sit  $a$ , ultimus verò (seu maximus) sit  $f$ ; & terminorum numerus dicatur  $n$ ; erit  $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$  (vel  $\frac{2nff}{6} + \frac{nfa}{6}$ ) æqualis summa quadratorum. Nam  $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$  æquatur summa terminorum (id clarissimè cernis in hujusce propositionis figura) ergo  $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$  æquatur triplæ summa quadratorum.

Hinc erit tripla summa quadratorum, ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut  $f - \frac{a}{2}$  ad  $f$ , vel ut  $1 + \frac{a}{2f}$  ad 1.

2. Si series incipiat ab 0, & primus ab eo terminus sit 1; erit summa quadratorum  $\frac{nff}{3} + \frac{nf}{6}$ . (è priore).

Hinc summa quadratorum tripla, ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut  $2n-1$  ad  $2n-2$ .

Nam  $nff - \frac{nf}{2} :: f - \frac{1}{2} \cdot f :: n-1 + \frac{1}{2} \cdot n-1$  (ob  $f=n-1$ )  
 $:: n - \frac{1}{2} \cdot n-1 :: 2n-1 \cdot 2n-2$ .

Item illa ad hanc se habet ut  $1 - \frac{1}{2n-2}$  ad 1.

3. Eodem posito, erit summa quadratorum  $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$ ; vel  $\frac{n^3}{3} - \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$ . Nam ob  $n-1=f$  erit  $nn-2n-1=ff$ . quare  $2nff = 2n^3 - 4nn + 2n$ . &  $nf=nn-1$  quæ collecta dant  $2n^3 - 3nn + n$ .

4. In quacunque Progressione, si minimus terminus sit  $a$ , excessus æ erit summa quadratorum  $naa - nn$  }  $a \cdot x$   
 $- \frac{2n^3 - 3nn + n}{6} \cdot xx$

Nam summa quadratorum est

$$a. a - | x. a + 2x. a - | 3x$$

$$\text{Summa } naa + {}^xna \left. \vphantom{\begin{matrix} naa \\ {}^xna \end{matrix}} \right\} ax$$

$$aa - | 0 - | 0$$

$$aa + 2ax - | xx$$

$$aa - | 4ax + 4xx$$

$$aa - | 6ax + 9xx$$

$$\frac{+ 2n^3 - 3nm + n}{6} xx$$

\* Nam summa 0. 2. 4. 6. = m - n.

5. Ex his porro colligitur in istis progressionibus quæ à nihilo incipiunt, quo major est terminorum numerus, eò quadratorum ex inæqualibus summam triplicatam, ad æqualitatem cum summa quadratorum è totidem æqualibus maximo propius accedere, nam si pro  $f$  substituaturs ea major quilibet  $g$ , quia  $1 - | \frac{a}{2g} \Rightarrow 1 - | \frac{a}{2f}$  liquet triplam summam quadratorum ex illis quorum maximus terminus est  $g$ , minus inæqualem esse summæ quadratorum è totidem æqualibus maximo, quam ubi maximus terminus est  $f$ .

6. Adeoque si numerus terminorum infinitus sit, tripla summa quadratorum ex inæqualibus justè adæquabitur quadratis è maximo, nam si ultimus terminus sit  $Z$ , erit  $\frac{a}{zz} = 0$  quia  $a$  ad  $z$  (necum ad  $zz$ ) nullam habebit proportionem. Cæterum fontem hîc uberri-  
mum aperuit Archimedes, à quo plurimi in fundum Mathematicum fluvii redundarunt.

Pertentando colligetur isthoc hoc pacto.

$$\text{Series } 1^2. \quad 0. \quad 1. \quad \text{tripla } 3. \left. \vphantom{\begin{matrix} 0. \\ 1. \\ \text{tripla } 3. \end{matrix}} \right\} \text{ratio } 1 \frac{1}{2}. \quad 1.$$

$$\text{Series } 2^2. \quad 0. \quad 1. \quad 4. \quad \text{tripla } 15 \left. \vphantom{\begin{matrix} 0. \\ 1. \\ 4. \\ \text{tripla } 15 \end{matrix}} \right\} \text{ratio } 1 \frac{1}{4}. \quad 1.$$

$$\text{Series } 3. \quad 0. 2. 4. 9. \quad \text{tripla } 42 \left. \vphantom{\begin{matrix} 0. \\ 2. \\ 4. \\ 9. \\ \text{tripla } 42 \end{matrix}} \right\} \text{ratio } 1 \frac{1}{6}. \quad 1.$$

$$\text{Series } 4. \quad 0. 1. 4. 9. 16. \quad \text{tripla } 90. \left. \vphantom{\begin{matrix} 0. \\ 1. \\ 4. \\ 9. \\ 16. \\ \text{tripla } 90. \end{matrix}} \right\} \text{ratio } 1 \frac{1}{8}. \quad 1.$$

Eodem modo procedit ratio ad infinitum, versus æqualitatem vergendo.

Prop. X I.

Si lineæ continuò ponantur quotlibet (Z A, Z B, Z C, Z D) æquali sese excedentes; & alie lineæ ponantur (\*Z D, Z E, Z F) multitudine vel ZE, ZF, Z G. sine quidem unâ minores æqualiter sese excedentibus, magnitudine vero singula æquales maxime (ZD); quadrata omnia ab æqualibus maxime

DZq + EZq + FZq *xima ad quadrata sese equaliter excedentium sine mini-*  
 DZq. + CZq + BZq *ma (ZA) minorem rationem habebunt, quàm quadratum*  
 DZq. DZ \* AZ + DAq *maxima ad æquale utrique, tum comprehenso sub maxima,*  
 3 *& minima, tum tertiæ parti quadrati excessus, quo maxi-*  
 EZq. + FZq. + GZq. *ma excedit minimam; ad quadrata verò sese equaliter*  
 CZq. + BZq. + AZq. *excedentium sine quadrato maximæ majorem eadem ratio-*  
 EZq. EZ \* AZ + EAq. *ne.*  
 3

Est enim AZ x: DZ + EZ + FZ + DAq. + EAq. + FAq

a 3. 2. et 1. ax. 1 <sup>3</sup> = AZq + AZq + AZq + AZ x: DA + EA + FA: +  
DAq. + EAq. + FAq ⇒ AZq + AZq + AZq: + AZ x:

2 DA + 2 CA + 2 BA: + DAq + CAq + BAq (quia scilicet DA + EA + FA ⇒ 2 DA + 2 CA + 2 BA; <sup>b</sup> &  
 c 4. 2. & 2. ax. DAq. + EAq. + FAq ⇒ DAq. + CAq. + BAq) <sup>c</sup> = DZq +

d 8. 5. <sup>1.</sup> CZq + BZq. <sup>3</sup> ergo DZq. + EZq. + FZq. DZq. + CZq. +  
 BZq. ⇒ (DZq. + EZq. + FZq. AZ x: DZ + EZ + FZ +  
 c 12. 5. DAq. + EAq. + FAq <sup>c</sup> ::) DZq. AZ x DZ + DAq.

Similem adhibendo discursum, quoniam EA + FA + GA <sup>3</sup> ⇒  
 2 CA + 2 BA; & EAq. + FAq. + GAq <sup>3</sup> ⇒ CAq. + BAq;  
 g 2 cor. 10 b. erit AZ x: EZ + FZ + GZ + EAq. + FAq. + GAq

h 8. 5. ⇒ CZq + BZq + AZq. <sup>3</sup> quare EZq + FZq + GZq. CZq  
 k 12. vel 15. 5. + BZq + AZq ⇒ (EZq + FZq + GZq. AZ x: EZ + FZ  
 + GZ + EAq. + FAq. + GAq <sup>k</sup> ::) EZq. AZ x EZ +  
EAq.

3

Coroll.

Et proinde si similes figuræ describantur ab omnibus, tam ab inæqualiter sese excedentibus quàm ab æqualibus maximæ; figuræ omnes, quæ ab æqualibus maximæ ad illas quæ ab æqualiter sese excedentibus, sine figura quæ à minima, minorem rationem quàm quadratum à maxima ad æquale utrique simul & comprehenso sub maxima

ac minima, & tertiæ parti ejus quod est ab excessu, quo maxima exsuperat minimam; ad eas verò quæ ab iisdem sunt figuras sine illa quæ à maxima, majorem eadem ratione.

Schol.

$$\begin{aligned} \text{Si } D A = Z A, \text{ vel } Z D = 2 Z A, \text{ liquet esse } Z D q. Z D \times Z A - \frac{D A q}{3} :: 12. 7. \text{ vel } 3 Z D q. 3 Z D \times Z A + D A q :: 12. 7. \text{ Nam } \begin{matrix} a \text{ 15. 5.} \\ b \text{ 4 2.} \\ c \text{ 1. 6.} \\ d \text{ hyp.} \end{matrix} \\ 3 Z D q^b = 12 Z A q. \text{ \& } 3 Z D \times Z A^c = 6 Z A q, \text{ \& } D A q^d = \end{aligned}$$

Definitiones.

I.

Si in plano recta linea (A Z) manente altero termino (A) aequali Fig. 80.  
velocitate circumlata, restituatur densus (istuc) unde profecta est; simul verò cum linea circumducta feratur punctum aequè velociter sibi ipsi, secundum rectam (A Z), incipiens à manente termino (A); punctum helicem describet.

Schol.

Itaque si dividatur recta A Z in quocunque partes æquales A b, b c, c d, &c. & circumferentia à puncto B descripta in partes toridem æquales, ac ductis à centro A ad circumferentiæ divisiones radii, auferantur AB, AC, AD, &c. iplis A b, A c, A d &c. ordine æquales, per puncta A B, C, D &c. transibit helix. Et hic modus est helicem describendi.

II.

Vocetur itaque rectæ quidem terminus (A) qui manet ipsa circumducta, principium Helicis.

III.

Linea verò \* situs, à quo cæpit recta (A Z) circumferri, principium \* vel potius ipsa  
revolutionis. linea primò po-  
sita.

IV.

Recta, (A Z) quam quidem in prima revolutione perambulavit punctum in recta latum, prima vocetur; illa verò (Z Y) quam in secunda revolutione confecerit idem punctum, secunda; & consimiliter alia juxta revolutionum numeros pariter denominentur. Fig. 81.

## V.

*Spatium verò sub helice (APZ) in prima revolutione descriptâ, & rectâ (AZ) que prima est, dicatur primum; quod autem continetur ab helice (ZQY) per secundam revolutionem descriptâ, & rectâ secundâ (ZY) secundum vocetur; aliæque deinceps eodem modo nominentur.*

*Not.* Nonnunquam spatium secundum dicitur inclusio primo, juxta in 27 prop. h. ta definitionem hanc; at subinde secundum dicitur, excluso primo; & ita de reliquis.

## VI.

*Et descriptus circulus, centro quidem puncto (A) quod est principium Helicis, intervallo verò rectâ (AZ) que prima est, primus appellatur; ascriptus autem centro quidem eodem, intervallo verò (AY) duplici rectâ, secundus vocetur; & alii continuo post hos ad eundem modum.*

## VII.

*Fig. 82.* Ac si à puncto (A) quod est principium Helicis ducatur aliqua recta quedam linea (AB); que sunt ad hujus rectæ partes easdem (FZ) versùs quam revolutio fit, antecedentia vocentur, quæ verò ad alteras (EA) consequentia.

## Prop. XII.

*Prop. 10 IV.* Si in helicem (ABCDEZ) unâ revolutione descriptam ab helicis principio (A) incidant rectæ quotlibet (AB, AC, AD, AE) æquales inter se angulos facientes: æqualiter sese excedunt.

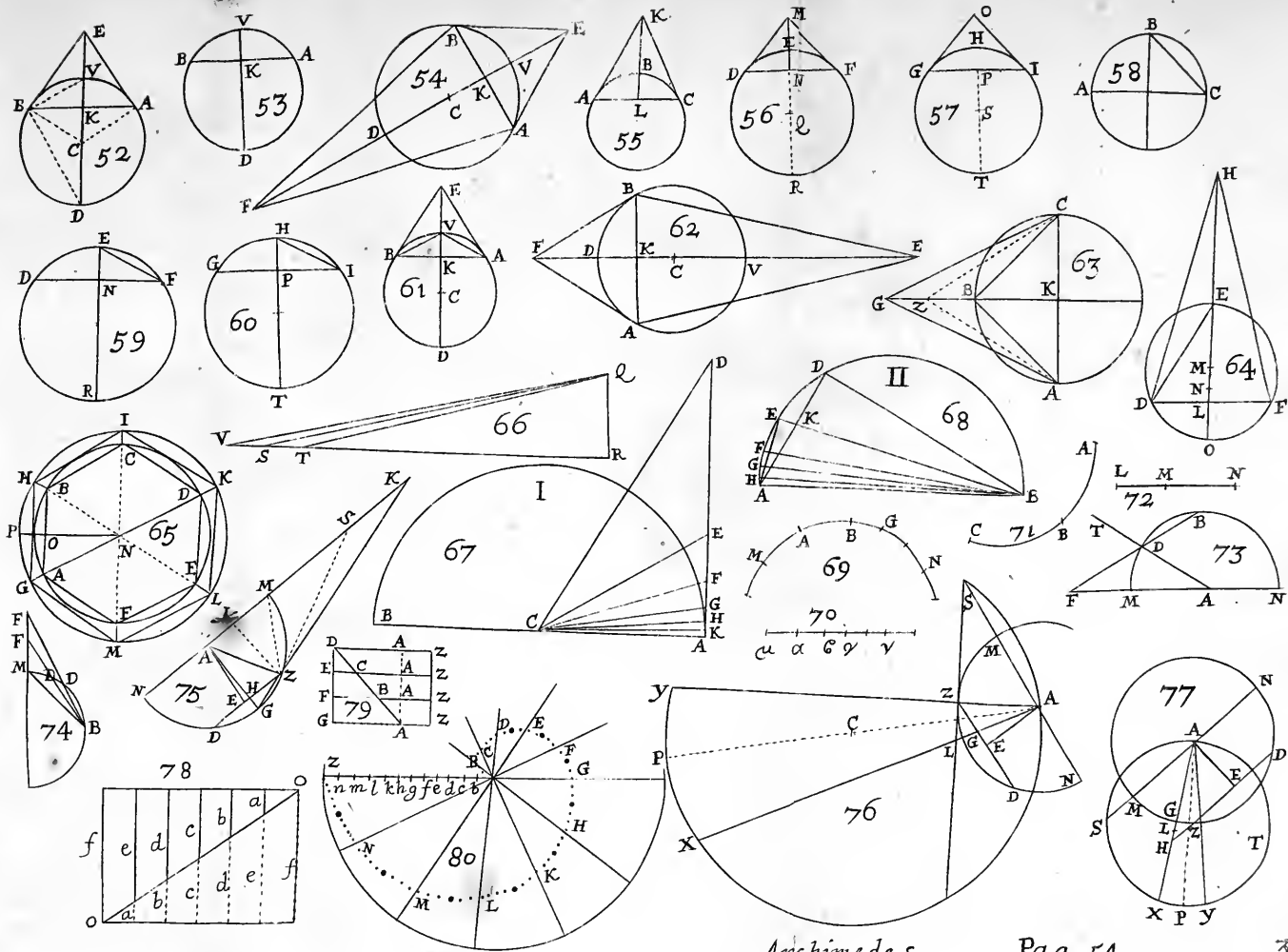
*Fig. 83.* Siat excessus CR, DS, ET; & centro A per Z ducatur circulus, ad quem protrahantur AB, AC, AD, AE; & ob angulos MAN, NAO, OAP pares, æliquet arcus MN, NO, OP æquari. ergo & tempora per MN, NO, OP æquantur, hoc est tempora per RC, SD, TE. ergo ipsæ RC, SD, TE æquantur. QED.

## Lemma.

*Fig. 84.* In triangulo BAC recta AG bisecet angulum BAC, erit AB ÷ AC, = 2 AG.

Per







Per G ducatur KL ad A G perpendicularis ; & per B fiat BH ad KL parallela. Estque BK<sup>a</sup> = HL. ergo LC ⊥ BK. (Nam CG. a 2. 6.) GB<sup>b</sup> :: CL. LH.) ergo AL ⊥ LC ⊥ AL (AK) — KB ⊥ b 3. 6. AL ⊥ AK hoc est AC ⊥ AB ⊥ AK ⊥ AL ⊥ AG. c 47. 1.

Prop. XIII.

Si recta linea (BC) contingat helicem (ABZ), in uno tantum puncto contingeret.

Tangat enim, si fieri potest, duobus in punctis B, C; & connectatur BC; & angulum BAC bifecet recta AG, occurrens helici in a 12 hujus. D; tangenti in G. estque AC — AD<sup>a</sup> = AD — AB. quare AC b 2. ax. 1. — AB<sup>b</sup> = 2 AD. Sed AC ⊥ AB ⊥ AG. ergo AD ⊥ AG. c 47. 1. pr. ex. ergo punctum G est intra helicem ; & proinde BC non tangit spiralem, contra hypothefin.

Prop. XIV.

Si in helicem (ABCZ) primâ revolutione descriptam incident aucta Papp. XIX. 4. rectæ (AB, AC) à puncto (A) quod est principium helicis, & producantur ad circumferentiam primi circuli (ZMNO) eandem inter se Fig 86. rationem habebunt in helicem incidentes (AB, AC) quam circuli arcus (ZMN, ZMO) qui sunt inter helicis terminum (Z), & terminos (N, O) à productis ad peripherias factos, sumptis in antecedentia arcubus, ab helicis termino (Z).

Est enim recta AB ad rectam AC, <sup>a</sup>ut tempus per AB ad tem- a 1 hujus. pus per AC; <sup>b</sup>hoc est tempus per arcum ZMN ad tempus per ar- b 1 def hujus cum ZMO, <sup>c</sup>hoc est ut arcus ZMN ad arcum ZMO.

Coroll. Eodem discursu quæcunque partes rectarum ad se sunt, ut arcus eodem tempore peracti ; & totus radius ad quamcunque partem ipsius se habet, ut tota peripheria ad arcum eodem tempore per- volutum.

Prop. XV.

Et siquidem in helicem (AZBCY) ex secunda revolutione de- Fig. 87. scriptam inciderint rectæ (AB, AC) ab helicis principio (A); eandem rationem habebunt rectæ (AB, AC) quam dictæ peripheria (ZMN, ZMO) post acceptas integras circumferentias.

a i *bujus.*  
b i *def. bujus.*

Rursus enim est recta A B ad A C, <sup>a</sup>ut tempus per A B ad tempus per A C, <sup>b</sup>hoc est ut tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M N ad tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M O, <sup>a</sup>hoc est ut tota circumferentia cum arcu Z M N ad totam circumferentiam cum arcu Z M O.

*Sch.* Eodem modo, de partibus ostendetur, ut in *Coroll.* præcedentis, quod & ad sequentia extendetur.

Nota vero posse dictarum peripheriarum rationes in quovis circulo circa centrum A descripto computari: rectæ enim A L, A N, A O protractæ similes perpetuo peripherias abscedunt.

*Coroll.* Eodem ostendetur modo quod si in helicem ex tertia revolutione descriptam inciderint rectæ, eandem inter se rationem habebunt, quam dicti arcus post totas circumferentias bis sumptas: quin & similiter quæ in alias helices incidunt, demonstrantur eandem habere rationem, quam dicti arcus post integras circumferentias toties acceptas, quotus est numerus revolutionum unitate minutus, etiam si altera incidens in terminum helicis cadat.

### Prop. XV I.

Fig. 88.

Si helicem (A B Z) ex prima revolutione descriptam contingat recta linea (S T); & à contactu (B) connectatur ad punctum (A) quod est principium helicis; inæquales erunt anguli (A B S, A B T) quos facit tangens ad connexam; & quidem (A B T), qui in antecedentia, obtusus est; qui verò (A B S) in consequentia, acutus.

a i *def. bujus.*  
b 15. 3.

c 8 *buju.*

d 4 *cor. 33. 6.*  
e 44 *bujus.*  
f 7. 5.  
g 10 5.

Centro A per B ducatur circulus B D E G; liquet helicem extra hunc cadere versùs partes T, <sup>a</sup>quia versùs illas crescunt ad helicem ductæ rectæ; unde angulus A B T angulo semicirculari A B D, & <sup>b</sup>proinde quovis acuto major est. Sit itaque, si fieri potest, rectus; <sup>b</sup>quamobrem B T tanget circulum B D E; unde <sup>c</sup>duci poterit recta A T secans tangentem in T, & circulum D, ita ut intercepta D T sit ad radium A D in minori ratione, quàm arcus B D, ad arcum E G B. Occurrat A B circulo primo Z M N in N, & A D eidem in O, ac helici in H. estque componendo A T. A D  $\supset$  (arc E G B D. arc E G B  $\therefore$  arc Z M N O. arc Z M N  $\therefore$  A H. A B  $\therefore$ ) A H. A D. <sup>e</sup> unde A T  $\supset$  A H; adeoque tangens intra helicem cadet, nec ideo tanget; quæ repugnant. quin potius angulus A B T obtusus est, quique deinceps A B S acutus.

*Coroll.*

Coroll.

Haud abſimiliter oſtendetur, ſi & tangens helicem ad terminum (Z) contingat, idem evenire.

Prop. XVII.

Quinimò ſi helicem è ſecunda revolutione deſcriptam recta contingat, idem accidet.

Prorſus eâdem methodo demonſtratur quâ præcedens, niſi quòd hic loco prop. 14. adhibeatur prop. 15. huius.

Coroll.

Eadem verò evenient, etiam ſi tangens ad finem helicis contingat.

Item ſimiliter oſtendetur, quòd ſi ex quacunque revolutione deſcriptam helicem recta quædam linea tangat, etiamnum ad finem ejus, inæquales efficiet angulos ad conjunctam à tactu ad principium helicis; & eum quidem qui in antecedentia eſt, obtuſum, illum verò qui in conſequentia, acutum.

Prop. XVIII.

Si helicem (AZB) ex primâ revolutione deſcriptam tangat recta linea (PZ) ad helicis terminum (Z); à puncto autem (A) quod eſt in principio helicis, ducatur quædam (AP) revolutionis principio (AZ) perpendicularis, ducta (AP) tangenti occurrerit; & quæ eſt inter tangentem ac principium ſpiralis recta (AP) æqualis eſt circuli peripheriæ  $\pi$ . Fig. 89.

Quòd tangens occurrat perpendiculari AP, patet; \* quia angulus \* 16 huius. AZB eſt acutus. Porro

Sit recta AO major peripheria  $\pi$ ; & ducatur OZ; dico OZ ſecare helicem infra Z, vel ad antecedentia helicis. Nam fiat AE ad OZ perpendicularis; ducatur autem AH, ſecans OZ protractam in a 6 huius. H, & circumulum in G, ita ut ſit intercepta GH ad chordam ZG, Z A ad  $\pi$  (id fieri poteſt, quia Z A.  $\pi$ . <sup>b</sup>  $\leftarrow$  Z A. A O, <sup>c</sup> vel Z E. A E). <sup>b</sup> hyp. & 8. 5. <sup>c</sup> 4. 6. <sup>d</sup> conſt. Secet autem AH helicem in B. Et quia GH. arc ZG <sup>b</sup>  $\rightarrow$  (GH. chord ZG <sup>d</sup> ::) Z A.  $\pi$ . erit permutando G H. | Z A.  $\rightarrow$  arc Z G.  $\pi$ . 

AG

ergo componendo AH. AG.  $\rightarrow$  ( $\pi$  - | - arc Z G. arc Z G  $\therefore$  ::) e 15 huius. AB. AG. <sup>f</sup> square AB  $\leftarrow$  AH. ergo punctum H eſt intra helicem, & f 10. 5. proinde OZ ſecat helicem.

Fig 90.

Sit secundo AQ minor quam  $\sigma$ , dico quoque ductam QZ helicem secare: nam ducatur tangens ZT. & AE ad ZQ perpendicularis; & quia AZ.  $\sigma^5 \supset$  AZ. AQ; <sup>h</sup>duci possit recta AL, ita ut HG inter ZQ, & circulum posita se habeat ad ZL, partem tangentis abscissam, ut AZ ad  $\sigma$ ; secet autem AL helicem in B. Et quia AZ.  $\sigma^k::$  HG ZL <sup>1</sup>  $\supset$  HG. arc ZG. erit permutando AZ (AG). HG.  $\supset$   $\sigma$ . arc ZG  $\supset::$  AG. BG. <sup>n</sup> ergo HG  $\supset$  BG. unde punctum H est intra helicem: & proinde QZ helicem secat. Quum igitur nulla QZ ad perpendicularem AP ducta peripheria inæqualem abscindens tangat helicem, liquet illam quæ tanger, peripheria æqualem abscindere. QED.

Fig. 91.

Dico porro, si AP =  $\sigma$ , ductam PZ helicem tangere. Sumatur enim in DZ quodvis punctum H, & per ipsum ducatur AH occurrens helici in B, circulo in G; & demittatur HK ad PA parallela; centro autem A per K ducatur circulus KRV, helicem secans in R; & per R ducatur radius AS. Estque PA. HK  $\supset::$  AZ. KZ  $\supset::$  AZ. RS <sup>1</sup>  $\supset::$   $\sigma$ . arc ZS. ergo quum PA  $\supset$   $\sigma$ , erit HK = arc. ZS. verum HK  $\supset$  arc ZG. ergo arc ZS  $\supset$  arc ZG. unde AR  $\supset$  AB. ergo quum AH  $\supset$  AR vel AK, liquet punctum H extra helicem cadere. quare tota DZ extra ipsam cadit.

In protractâ porro PZ sumatur quodvis punctum h, & per ipsum ducatur Ak secans helicem in b, circulum in g. Item ab e demittatur ek ad AZ perpendicularis, & centro A per k ducatur circulus krv helicem secans in r; ducaturque recta Ar, circulo primo occurrens in s. éssique ut prius AP. hk  $\supset::$  AZ. ZK  $\supset::$  AZ. Sr <sup>1</sup>  $\supset::$   $\sigma$ . arc ZS. <sup>x</sup> unde hk = arc Zs. Atqui bk  $\supset$  arc Zg. ergo arc Zs  $\supset$  arc Zg. quare Ar  $\supset$  Ab. verum Ab  $\supset$  Ak = Ar. ergo magis Ab  $\supset$  Ab. ergo punctum h est extra helicem. unde planè concluditur totam PZ utrunque productam extra helicem poni, ipsamque proinde contingere.

Ita subtrissimum hoc Archimedis theorema, cum ejus converso, demonstravimus ostensivè; quod maluimus facere, tum quia præstantior est hic demonstrandi modus, tum quo melius authoris ipsius methodus innotesceret. Siquidem duæ primæ partes Archimedis principiis insistant; tertiam nos excogitavimus, quæ monstrat quàm facile, quàmque perspicuè theorematibus hujus conversum demonstrari possit, adeoque quomodo potuit inveniri.

## Prop. XIX.

At si spiralem (A Z Y) ex secunda revolutione descriptam ad terminum contingat recta, & à principio spiralis ducatur quædam (A O) ad rectos revolutionis principio (A Y), \*occurrer ipsa contingenti; eritque recta qua est inter tangentem, & principium spiralis, dupla peripheria secundi circuli ( $\sigma$ ). Fig. 92.  
\* per 17 huj.

Sit enim O A  $\perp$   $2\sigma$ . unde A Y, Z  $\sigma$ .  $\perp$  A Y. O A  $\therefore$  Y E. A E (ductâ scilicet A E ad O Y perpendiculari) ergo rursus duci possit recta A H secans O Y protractam in H, & circulum in G, ita ut sit intercepta G H ad chordam G Y, ut A Y ad  $2\sigma$ . secet igitur A H spiralem in B. Et quia G H. arc Y G  $\therefore$  G H. chord Z G  $\therefore$  A Y.  $2\sigma$ ; erit, permutando G H. A Y  $\therefore$  (arc Y G.  $2\sigma$   $\therefore$ ) G B. A Y. ergo G H  $\therefore$  G B. & proinde punctum H est intra helicem. Unde O Y non continget helicem. Similiter, si ponatur Q A  $\therefore$  Q  $\sigma$ , imitando præcedentis ratiocinium, demonstrabis ductam Q Y helicem non tangere: quapropter quæ tangit Y P duabus peripheriis æqualem A P abscindet. Q. E. D. a 3. 5.  
b 4. 6.  
c 6 hujus.  
d const.  
e sch. 15 huj.  
f 10. 5.

Sed & unico argumento, sicut in præcedenti, demonstrari possit conversum hujus, nempe si A P =  $2\sigma$ , rectam P Y tangere helicem: tu rem expende; mihi constitutum est à repetitionibus temperare.

## Coroll.

Eodem modo demonstrabitur, quod si helicem in qualicunque revolutione descriptam recta quædam tangat in helicis termino, & à principio heliciseducta, revolutionis principio perpendicularis, occurrat tangenti, multiplex hæc erit peripheriæ circuli, juxta revolutionum numerum denominati, eodem numero.

## Prop. XX.

Si helicem (A B Z) in prima revolutione descriptam tangat recta linea (B P) non ad finem helicis; à contactu verò (B) ad principium helicis conjungatur recta (B A) & centro quidem (A) principio helicis, intervallo autem conjunctæ (A B) describatur circulus (B E F); à principio autem helicis ducatur quædam (A P) à contactu ad initium helicis connexæ (A B) perpendicularis; occurret illâ contingenti, eritque recta (A P) occursui, & helicis principio injecta, æqualis peripheriæ (E F B). Fig. 93.

(E F B) quæ est inter contactum, & sectionem, ubi descriptus circulus secat principium revolutionis; in antecedentia acceptâ peripheriâ à puncto (E) quod est in principio revolutionis.

Coroll. 14. &  
15.

Nihil facilius est, quàm præcedentes discursus huc applicare: nota tantum, si ducatur quæpiam A C secans helicem in C, circulum in G, fore A G. G C :: arc EF B. arc B G. Cætera sponte fluent:

A B

quid plura?

— ἐχθρὸν δὲ μοι ἔσται

Δύσας ἀριζήτως εἰρημὶα κυδολογήουσιν.

Coroll.

Quinetiam eodem pacto demonstrabitur, si in secunda circumvolutione descriptam helicem contingat recta, non ad finem helices, alia verò eadem construantur, quòd rectæ contingenti occurrentis pars, intercepta à principio helices, æqualis est toti descripti circuli peripheriæ, & præterea illi, quæ est inter dicta puncta, similiter sumptâ peripheriâ. Et porro si ex quacunque revolutione progenitam helicem contingat aliqua recta, non ad terminum helices; alia verò eadem disponantur, quòd recta dictis punctis interjecta, sit multiplex quædam peripheriæ descripti circuli secundum numerum proximè minorem eo, secundum quem revolutiones dicuntur, & insuper æqualis arcui inter dicta puncta similiter sumptò.

Prop. XXI.

Fig. 94.

Sumendo spatium comprehensum sub helice (A B C D E F G L Z) in prima revolutione descripta, & prima in principio revolutionis recta (A Z); possibile est ipsi figuram planam circumscribere, aliâque inscribere, è similibus compositam sectoribus, ita ut circumscripta inscriptâ major sit quocunque proposito spatio (X).

29 I.

Radii quolibet primi circuli circumferentiam æqualiter partiant (ordiando ab Z) occurrentes helici punctis A, B, C, D, E, F, G, L, Z. tum centro A per hæc puncta ducantur arcus  $b B \epsilon$ ,  $c C \kappa$ ,  $d D \delta$ ,  $e E \epsilon$ ,  $f F \phi$ ,  $g G \gamma$ ,  $l L \lambda$ ,  $z Z$ : itaque vides circumscriptam helici figuram A B C D E F G L Z conflatam è sectoribus similibus  $b A b$ ,  $c A C$ ,  $d A D$ , &c. Vides etiam alteram A B C C  $\kappa$  D L E  $\epsilon$  F  $\phi$  G  $\gamma$  L  $\lambda$  inscriptam, constantemque sectoribus B A  $\epsilon$ , C A  $\kappa$ , D A  $\delta$  &c. qui totidem sunt, & æquales sectoribus figuræ circumscriptæ, excepto maximo  $z A Z$ . (<sup>b</sup> nam sector C A B =  $b A B$ ; &  $\kappa A C$

b 33. 6.



\*  $A C = c A C$ , &c. Itaque si circulus <sup>a</sup>bisectione (vel aliâ æquali sectione) continuo divisus fuerit, ita ut sector  $\approx A Z$  tandem evadat minor dato spatio  $X^c$  (id quod fieri potest), liquet hoc modo fieri posse quod proponitur. c 1. 10.

Coroll.

Hinc patet, quòd possibile sit circa dictum spatium figuram, qualis dicta est, describere, ita ut circumscripta figura spatium superet excessu minori quocunque proposito spatio: & rursus, aliam inscribere, ita ut similiter spatium superet figuram minori quocunque proposito spatio.

Sch. Nota radios  $A B, A C, A D, A E$ , &c. sese æqualiter excedere; & excessus æquari minimo  $A B$ . 12 hujus.

Prop. XXII.

Sumendo spatium comprehensum sub helice ( $Z M N O P R Y$ ) per secundam revolutionem descriptâ, & recta ( $Z Y$ ) quæ est secunda in principio revolutionis, potest ipsi figura plana circumscribi, similibus è sectoribus composita, necnon alia inscribi, sic ut circumscripta inscriptam excedat minori quàm proposito quovis spatio ( $X$ ). Fig. 95.

Radii quotlibet secundum circulum æqualiter dispertiant, occurrentes helici punctis  $Z, M, N, O, P, R, Y$ ; per quæ, centro  $A$ , describantur arcus  $Z \zeta, m M \mu, n N \nu, o O \omega, p P \varpi, r R, \gamma Y$ ; unde helici circumscriptam habemus figuram  $A m M n N o O p P r R \gamma Y$  constantem similibus sectoribus  $m A M, n A N, o A O$ , &c. & inscriptam aliam  $A Z \zeta M \mu N \nu O \omega P \varpi R \gamma$  constantem totidem sectoribus  $Z A \zeta, M A \mu, N A \nu$ , &c. Et cum sit sector  $m A M^b = M A \mu$ ; b 33. 6. &  $n A N^b = N A \nu$ , & ita continuo, liquet excessum figurarum esse penes sectores  $Z A \zeta$  primum inscriptæ, &  $\gamma A Y$ , ultimum circumscriptæ (nam reliqui hujus reliquis illius æquantur). atqui continuâ bisectione fieri potest, ut sit rector  $\gamma A Y \supset X$ ; tumque fortius erit c 1. 10. sect.  $\gamma A Y - Z A \zeta \supset X$ . quare constat propositum.

Schol. Rursus nota radios  $A Z, A M, A N$ , &c. æquali excessu procedere, & maximum  $A Y$  duplum esse minimi  $A Z$ . 12 hujus.

Coroll.

## Coroll. I.

Itaque liquet excessum circumscriptæ figuræ supra sumptum spatium (sub helice comprehensum) minorem esse posse quovis proposito spatio. Itidemque dicti spatii supra inscriptam figuram excessum minorem esse posse quolibet proposito spatio.

## II.

Simili modo liquet, quod possibile est circa spatium sub helice in quacunque revolutione descripta, & recta in principio revolutionis, ab eodem numero denominata comprehensum describere figuram, qualem diximus planam, ita ut circumscripta figura superet sumptum spatium minori omni proposito spatio; & rursus inscribere, ita ut sumptum spatium majus sit, quam in scripta figura, minori quovis proposito spatio.

## Prop. XXIII.

Fig. 96.

Sumpto spatio (CAG) comprehenso sub helice, qua minor est descripta in prima revolutione, non habenti pro termino principium helicis, & sub rectis (AC, AG) ductis à principio helicis; possibile est spatio figuram circumscribere, similibus è sectoribus compositam & aliam inscribere ita ut circumscripta figura superet inscriptam minori quàm quocunque proposito spatio (X).

Rectæ AD, AE, AF æqualiter secent angulum CAG, vel arcum KG, ita ut sector  $gAG \supset X$ ; & centro A per C, D, E, F ducantur arcus Cx, dD<sup>2</sup>, eE<sup>3</sup>, fF<sup>4</sup>, & (sicut in præcedentibus) planissime liquet propositum.

## Coroll.

Hinc manifestum est, quod circa dictum spatium figuram planam describere licet, qualem diximus, ut circumscripta figura major sit spatio, minori quam proposito quovis spatio.

## Prop. XXIV.

Fig. 97.  
Eppus 21, IV.

Spatium sub helice (ABCDZ) in prima revolutione descripta, & prima recta (AZ) que est in principio revolutionis, tertia pars est primi circuli. Spatium dicatur (S), & primus circulus  $\odot a$ .

Dico





Dico primò, non esse  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsubset S$ . Nam si affirmas helici <sup>a</sup>circum- <sup>a cor. 21 huj.</sup> scribatur figura  $A B B C C d D Z$ , juxta præscriptum 21 hujus, quæ <sup>b 4 ax. 1.</sup> dicatur  $\phi$ , ita ut sit  $\phi \sqsupset S \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset S$ : <sup>c schol. 21 h.</sup> vel  $\phi \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha$ . Cum verò <sup>d 3 cor. 10 h.</sup> radii  $A B$ ,  $A C$ ,  $A D$  &c. sese æqualiter excedant, & excessus æ- <sup>e 4 & 5 ax. 1.</sup> quetur minimo  $A B$ , & sectores (ad ipsos) similes sint, & erunt tot se- <sup>d 3 cor. 10 h.</sup> ctōres æquales maximo  $\alpha A Z$ , quot sunt omnes inæquales, minores <sup>e 4 & 5 ax. 1.</sup> triplo inæqualium, hoc est circulus  $\alpha$  minor triplo figuræ  $\phi$ ; vel  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset \phi$ . at prius affirmasti esse  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsubset \phi$ . ergo tibi contradicis.

Dico secundò, non esse  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset S$ ; si hoc affirmas, helici <sup>a</sup>in- scribatur figura  $A B C C \alpha Z$ , quæ vocetur  $\psi$ , etiam juxta 21 hujus, ita ut  $S \sqsupset \psi \sqsupset S \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha$ ; <sup>c</sup> vel  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset \psi$ . atqui sectores omnes æquales sectori  $\alpha A Z$  <sup>d</sup> majores sunt triplo totidem inæqualium sine  $\alpha A Z$ , <sup>Hoc etiam belle declarat Pap- pus in 21. IV.</sup> hoc est  $\odot \alpha \sqsubset 3\psi$ , vel  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsubset \psi$ . at prius erat  $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset \psi$ , quæ re- pugnant.

Restat igitur, ut sit  $\frac{1}{3} \odot \alpha = S$ . Q. E. D.

Schol.

Hoc directè perspicitur è scholio ad 10 hujus. Cum enim secto- res figuræ circumscriptæ vel inscriptæ procedant ut 0, 1, 4, 9, 16 &c. (in duplicata scilicet radiorum proportionē) & quò desinant in spati- um helici, eorum numerus sit infinitus, ideo totidem eorum maximo æquales, hoc est totus circulus, eorum omnium triplus est, hoc est ip- sius spatii, ab helice comprehensi, triplus.

Eleganter hoc etiam colligitur methodo indivisibilium. Dividatur enim radius  $A Z$  in partes quotlibet æquales punctis  $b, c, d, e, f, g, h$ ; & centro  $A$  per ista puncta describantur arcus  $b B$ ,  $c C$ ,  $d D$ , &c. occurrentes helici punctis  $B, C, D, E, F, G, H$ . Estque arcus  $c C$  qua- druplus arcus  $b B$  (ob radiū  $c A$  duplum radii  $b A$ , & angulum  $c A C$  duplum anguli  $b A B$ ), & arcus  $d D$  noncuplus arcus  $b B$ ; & sic per- petuò juxta seriem 0, 1, 4, 9, 16 &c. usque ad maximum  $\alpha \alpha$ . quare si numerus horum arcuum infinitus sit (vel si per omnia radii  $A Z$  puncta transeant) erit eorum summa subtripla totidem æqualium ma- ximo; hoc est radii ducti in circumferentiam circuli  $Z Z$ , hoc est du- pli circuli  $Z Z$ . ergo spatium ex iis constans est  $\frac{2}{3}$  circuli  $Z Z$ , & reli- quum intra helicem est  $\frac{1}{3}$  ejusdem. Exhinc patet magna spiralem in- ter & parabolam affinitas; nam si  $A X$  sit axis parabole  $A B C D E F G H Z$ , cujus vertex  $A$ , tangens  $A Z$ , & per puncta divisionum  $b, c, d$ , &c. ducantur ad axem parallelæ  $A B$ ,  $c C$ ,  $d D$  &c. Erit  $c C = 4$   $b B$

Fig. 97.

Fig. 98.

$bB$ , &  $dD = 9bB$  &c.  $dD = 16bB$ , eâdemque sic perpetuò ratione sicut in spirali; adeò quidem ut si recta  $bB$  hîc æquetur arcui  $bB$  istic; sint omnes rectæ  $cC$ ,  $dD$  &c. arcubus respectivis  $cC$ ,  $dD$  &c. æquales. unde spiralis nihil est aliud quàm parabole, cujus parallelæ axi rectæ in circulares arcus, circa verticem  $A$  veluti centrum, contorquentur. Unde non adeò mirum est innumeras spiralis affectiones cum passionibus parabolæ conspirare. Mihi sufficiet hoc obiter subnotâsse; qui plura volet, adeat *Gregorium Vincentium*, *Cavallerium*, *Torricellium*, aliosque.

Coroll.

Fig. 99.

Simili planè discursu, si à centro  $A$  ducatur in primæ revolutionis helicem recta quævis  $AG$ ; & centro  $A$  per  $G$  describatur circulus  $EFG$ , occurrens revolutionis principio  $AZ$  in  $E$ ; erit spatium conclusum helice  $ABG$ , & rectâ  $AG$  subtripulum sectoris  $A EFGA$ .

Prop. XXV.

fig. 95.

\* schol. II b.

*Spatium* ( $\Sigma$ ) *sub spirali* ( $ZMNOPRY$ ) & *recta* ( $ZY$ ) *secunda in principio revolutionis ad secundum circulum* ( $\odot$ ) *hanc habet rationem, quam habet 7 ad 12; \* quæ eadem est, quam habent utraque simul, quodque comprehenditur sub radio secundi circuli* ( $AY$ ), & *radio primi circuli* ( $AZ$ ), & *tertia pars quadrati, quod ab excessu* ( $ZY$ ) *quo radius secundi circuli excedit radium primi circuli, ad quadratum à radio secundi circuli.*

a cor. 22 buj.

Si fieri potest, sit primò  $\odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq \sqsubset \Sigma$ . Circumscribatur igitur spatio figura (quam voca  $\phi$ ) constans sectoribus, qualis in 22 hujus, ita ut  $\phi \sqsupset \odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq \sqsupset \Sigma$ . <sup>b</sup>vel  $\phi \sqsupset \odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq$ . Cum verò rectæ  $AZ$ ,  $AM$ ,  $AN$ ,  $AO$  &c. <sup>c</sup> sese æqualiter excedant, & super iis (exceptâ minimâ  $AZ$ ) constituti similes sectores componant figuram  $\phi$ , & totidem æquales maximo  $\gamma AY$  conficiant circulum  $\odot$ ; <sup>d</sup>erit  $\odot \phi$ .  $\phi \sqsupset AYq$ .  $AY \times AZ \div \frac{1}{3} ZYq^c :: \odot \phi$ .  $\odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq$ . <sup>e</sup>quare  $\phi \sqsubset \odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq$ . Erat verò  $\phi \sqsupset \odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq$ , quæ repugnant.

b 4. ax. 1.

c sch. 22 buj.

d cor. 11. buj.

e cor. 2. 12.

f 10. 5.

e 4 & 5. ax. 1.

Sin dicatur  $\odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq \sqsupset \Sigma$ . Inscribatur figura  $\psi$ , ita ut sit  $\Sigma \sqsupset \psi \sqsupset \Sigma \sqsupset \odot \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq$ . <sup>c</sup>quare  $\odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ} \div \frac{1}{3} ZYq \sqsupset \psi$ . atqui hîc sectores similes ad  $AZ$ ,  $AM$ ,  $AN$  &c. sine maximo  $\gamma AY$  constituunt figuram  $\psi$ , & totidem maximo pares circulum  $\odot$ . ergo  $\odot \psi \sqsubset \odot$ .  $\odot \text{ rad } \sqrt{AY \times AZ}$

\*  $AZ$

\*  $AZ + \frac{1}{3}ZYq$ . & proinde  $\odot \text{rad} \sqrt{AY * AZ + \frac{1}{3}ZYq}$ .  
quod itidem prædictis repugnat.

Quin igitur potius est  $\odot \text{rad} \sqrt{AY * AZ + \frac{1}{3}ZYq} = \Sigma$ . unde  
 $\Sigma. \odot \epsilon :: AY * AZ + \frac{1}{3}ZYq. ZYq * :: 7.12. \text{Q.E.D.}$  \* sch. 11 hnj.

Coroll.

Eodem autem modo demonstrabitur, quod comprehensum spatium sub helice per quamcunque revolutionem descripta, & rectâ eodem numero, quo revolutio, denominatâ, ad circulum itidem eodem numero denotatum, quo revolutiones; rationem haber, quam utraq; simul, quôdque sub radio circuli ejusdem numeri, & radio circuli numero, qui unitate minor sit numero revolutionum, denominar; & tertia pars quadrati quod ab excessu, quo excedit radius majoris circuli dictorum radium minoris è dictis circuli ad quadratum radii majoris circuli dictorum. Nempe spatium  $\alpha\gamma$  se habebit ad circulum tertium, ut  $AX * AY + \frac{1}{3}YXq$  ad  $AXq$ ; & spatium  $\alpha\gamma\delta$  se habebit ad circulum quartum, ut  $AV * AX + \frac{1}{3}XVq$  ad  $AVq$ .

Coroll.

Hinc ipsa spatia inter se erunt ut  $\frac{AZq}{3}, AY * AZ + \frac{ZYq}{3}, AX * AY + \frac{YXq}{3}, AV * AX + \frac{XVq}{3}$  &c. Nam sp.  $\alpha = \frac{AZq}{3} \times \frac{\odot \alpha}{AZq}$   
& sp.  $\epsilon = AY * AZ * \frac{\odot \epsilon}{AYq}$ . & sp.  $\gamma = AX * AY * \frac{\odot \gamma}{AXq} + \frac{ZYq}{3}$   
 $+ \frac{YXq}{3}$

at  $\frac{\odot \alpha}{AZq} = \frac{\odot \beta}{AYq} = \frac{\odot \gamma}{AXq}$  &c.

Hinc confici possit Tabella rationes exprimens quas habent spatia helicibus, & rectis comprehensa ad circulos ejusdem ordinis, & ad se invicem, quæ talis est. (quod si horum spatiorum primum subtrahatur è secundo, secundum è tertio, & ita deinceps, reliqua se habebunt juxta columnam ultimam; quæ nempe spatia respicit propositio 27<sup>a</sup> subsequens).

|     | Circuli. | Spatia. | Residua. |
|-----|----------|---------|----------|
| 1.  | 3        | 1       | 1 a.     |
| 2.  | 12       | 7       | 6 c.     |
| 3.  | 27       | 19      | 12 γ     |
| 4.  | 48       | 37      | 18 δ     |
| 5.  | 85       | 61      | 24       |
| 6.  | 108      | 91      | 30       |
| 7.  | 147      | 127     | 36       |
| 8.  | 192      | 169     | 42       |
| 9.  | 243      | 217     | 48       |
| 10. | 300      | 271     | 54       |

## Prop. XXV I.

Fig. 96.

Comprehensum spatium (C A G) sub helice (C G) quæ minor est descriptâ in una revolutione, non habens terminum principium helices (A), & rectis (A C, A G) à terminis ejus ad principium helices ductis, ad sectorem (K A G) radium quidem habentem aequalem majori (A G) ductarum à termino ad principium helices, arcum verò (G K) ductis rectis interceptum, ad easdem partes cum helice; hanc habent rationem quam habent utraque simul, quodque continetur sub rectis (A G, A C) à terminis ad principium spiralis ductis, & tertia pars quadrati ab excessu quo major ductarum superet minorem ad quadratum majoris (A G) à terminis ad principium helices conjunctarum.

a cor. 23 b.

b 4. ax. I.

c cor. 11 huj.

Sector ipsi K A G similis & cujus radius sit  $\sqrt{\cdot}$ : A G \* A C  $\div \frac{1}{3}$  C K q vocetur  $\xi$ : & si fieri potest, sit  $\xi$  major spatium C A G. <sup>a</sup> Circumscribatur figura qualis in 23 hujus, (quæ nominetur  $\phi$ ) ita ut sit  $\phi$ —sp. C A G  $\supset \xi$ —sp C A G. <sup>b</sup> vel  $\phi \supset \xi$ . Cum verò sint rectæ A C, A D, A E &c. æquali progredientes excessu, à quibus præterquam à minima A C, descripti similes sectores componunt figuram  $\phi$ , totidemque æquales maximo faciunt sectorem K A G, erit sect K A G.  $\phi \supset A G$  q. A G \* A C  $\div \frac{1}{3}$  C K q :: sect K A G.  $\xi$ . unde  $\phi \supset \xi$ . A K.

contra constructionem.



Sin dicatur spatium C A G majus dicto sectore  $\xi$ ,<sup>a</sup> inscribatur figura quædam  $\downarrow$ , ita ut  $\text{sp } C A G \text{ — } \downarrow \supset \text{sp. } C A G \text{ — } \xi$ ; adeoque  $\xi \supset \downarrow$ . atqui jam sect K A G.  $\downarrow \sqsubset$  sect K A G.  $\xi$ . unde contra constructionem,  $\downarrow \supset \xi$ . Ut hæc igitur vitentur absurda, erit  $\xi = \text{sp } C A G$ ; & idcirco  $\text{sp } C A G. \text{sect } K A G :: \text{sect } \xi. \text{sect } K A G :: A G \times A C \div \frac{1}{3} C K q. A G q. \text{ } \mathcal{L}. E. D.$

Coroll.

Spatium K C G. C A G :: A C  $\times$  C K  $\div \frac{1}{3} C K q. A G \times A C \div \frac{1}{3} C K q.$

Nam A K q<sup>a</sup> = A C q  $\div 2$  A C  $\times$  C K  $\div C K q.$  Pro A C q  $\div \frac{1}{3} C K q.$  A C  $\times$  C K <sup>b</sup>substituatur æquale A C  $\times$  A K; estque A K q = A C  $\times$  A K  $\div \frac{1}{3} C K q.$  ergo sect K A G.  $\text{sp } C A G :: A C \times A K \div \frac{1}{3} C K q. A G \times A C \div \frac{1}{3} C K q.$  & dividendo A G

$\text{sp } K C G. \text{sp } C A G :: A C \times C K \div \frac{1}{3} C K q. A G \times A C \div \frac{1}{3} C K q.$

Prop. XXVII.

Spatiorum comprehensorum sub helicibus & rectis, quæ in revolutione, *vid. not. ad § tertium quidem (γ) secundi (c) duplum est, quartum verò (δ) triplum, quintum autem quadruplum; & perpetuo subsequens secundum numeros qui deinceps, multiplex est secundi spatii; primum verò spatium (α) sexta pars est secundi (c).* *def. hujus. fig. ad coroll. 25.*

Clarissimè patet horum veritas è tertia columna tabellæ suprapositæ, è 25<sup>a</sup> deducta. quid plura?

Prop. XXXVIII.

Si in helice (A C G Z) ex una quacunque revolutione descripta sumantur duo puncta (C, G) quæ non sunt ipsius termini, à sumptis verò punctis connectantur rectæ (A C, A G) ad helicis principium (A); & centro quidem principio helicis, intervallis verò (A C, A G) ductis à punctis ad principium helicis describantur circuli (C L N, K G M) spatium (K G C) comprehensum sub majori arcu (K G) intercepto rectis (A C, A G) & helice rectis iisdem interjectâ, & rectâ (C K) productâ, hanc habebit rationem ad spatium (L C G) comprehensum sub minori arcu (L C), & eadem helice & rectâ (G L) connectente terminos ipsorum, quem radius (A C) minoris circuli cum duabus tertiis excessus (C K) quo radius majoris circuli excedit minoris circuli radium

Fig. 101.

ad radium minoris circuli cum una tertia parte ejusdem excessus (CK).

a cor. 27 h.  
b 26 hujus.  
c sch. 2. 12  
d sch. 19. 5.  
\* 3. 2. & 3 ax.  
1.  
f 1. 6.

Nam sp. K G C. sp. C A G<sup>a</sup> :: A C \* C K  $-\frac{2}{3}$  CKq. A K \* A C  
 $+\frac{1}{3}$  CKq. & sp C A G. sect K A G<sup>b</sup> :: A G \* A C  $+\frac{1}{3}$  C Kq A Gq;  
ac sect. K A G. sect. C A L<sup>c</sup> :: A Gq. A Cq. ergo ex æquo sp K G C.  
sect C A L :: A C \* C K  $+\frac{2}{3}$  C Kq. A Cq. <sup>d</sup> ergo sp K G C. sp  
C A G—sect. C A L :: A C \* C K  $-\frac{2}{3}$  C Kq. A K \* A C  $-\frac{1}{3}$  CKq

A

—A Cq : hoc est sp K G C. sp L C G :: A C \* C K  $+\frac{2}{3}$  C Kq. \* A C  
\* C K  $+\frac{1}{3}$  C Kq<sup>f</sup> :: A C  $+\frac{2}{3}$  C Kq. A C  $+\frac{1}{3}$  C Kq. Q. E. D.

Theorema.

Pappus 22. IV. Si ab helicis ABZ principio ducantur utcumque rectæ AD, AC,  
Fig. 102. erunt spatia ABDA, ABCA inter se, ut cubi è rectis AD, AC.  
a cor. 24 hujus. Centro A per D, C ducantur circuli FND, EMC secantes AZ  
& 15. 5. in E, F; estque spatium ABDA. ABCA<sup>a</sup> :: sect. AFNDA.  
b 20. def. 5. AEMCA<sup>b</sup> = AFNDA AEMKA + AEMKA. AEMCA  
c sch. 2. 12. =<sup>c</sup> ADq. AKq  $-\frac{1}{3}$  AD. AK = AD cub. | AK cub.  
| A C cub.

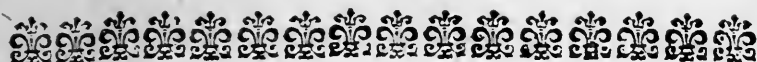
Pappus 35. IV. Per helicem cum alia difficilia Geometria Problemata, tum hoc præcipuum conficitur.

Problema.

Fig 103. Datum (angulam, vel) arcum Z M G secare in datam rationem.

Ducantur à centro A rectæ AZ, AC, & AG secet helicem ABZ  
in C; & ratio A E ad A C æquetur datæ, & centro A per E ducatur  
arcus circuli EB secans helicem in B; & ab A per B ducatur recta  
ABF; & liquet esse arc Z M F. arc F G<sup>a</sup> :: (A B. E C<sup>b</sup> ::) A E.  
E C, hoc est in data proportionē.

a cor. 14. huj.  
b 7. 5.  
c consp.



## DE CONOIDIBUS & SPHÆROIDIBUS.

*Archimedes Dositheo, S.*

**M**itto ad te conscriptas à me hoc in libello cùm reliquorum Theorematum Demonstrationes, quas inter priùs missas non habebas, tum aliorum postea repertorum, quæ quidem sæpe jam antea aggreſſius contemplari, cùm difficultatis aliquid habere videretur ipsorum inventio, ferè desperavi; quamobrem neque cum aliis edita sunt, quæ proponebantur: postea verò diligentius iis incumbens, inveni de quibus hæſitaveram. Erant autem è prioribus Theorematibus reliqua circa *Cônoides rectangulum* proposita, hæc verò jam tandem inventa versantur circa *Conoides hyperbolicum*, & *figuras Sphæroides*; quarum aliquas quidem oblongas, alias verò oblatas voco.

### *Definitiones, & Hypotheses.*

**D**E *Cenoide* utique *rectangulo* supponebantur hæc.  
 (Nota: è planis conum diversimodè secantibus ortas in coni superficie lineas, quas *Apollonium Pergæum* sequuti *Parabolam*, *Hyperbolam*, & *Ellipsim* jam appellant, vetustiores Geometræ nominabant sectiones *cont rectanguli*, *obtusanguli*, *acutanguli*; quia scilicet, opinor, sectiones hæc tantùm in cono recto, secto a plano ad crus trianguli per axem recto considerârunt; quomodo semper in cono rectangulo procreabitur *parabola*, in obtusangulo *hyperbola*, in acutangulo *Ellipsis*, ut nempe si *BVA* sit triangulum per axem coni, sitq; *DE* communis sectio plani secantis cum triangulo *BVA*, & *VD* plano

Fig. 104.  
 105.  
 106.

\* Quamvis  
hanc penitus  
ignotas archi-  
medi fuisse se-  
ctiones huiusce-  
modi in cono  
scaleno satis  
patet ex 8 & 9  
huius libri, ubi  
& ellipsis no-  
men expressum  
habetur.

plano secanti recta sit, ac ideo angulus  $VDE$  rectus; constat si angulus  $V$  rectus sit, esse  $DE$  ad  $VA$  parallelam, adeoque sectionem esse *parabolam*; sin angulus  $V$  sit obtusus, liquet  $ED$  cum  $AV$  producta convenire supra verticem coni, adeoque sectionem esse *hyperbolam*; quod si angulus  $V$  fuerit acutus, patet  $DE$  occurruram ipsi  $VA$  intra verticem, ac idcirco sectionem fore *ellipsim*. Talis mihi videtur primitus impostorum istorum nominum, \* quæ passim usurpat *Archimedes* ratio: nos verò tam brevitati quàm perspicuitati consulentes ubique pro desuetis istis & jam minus appolitis vocabulis usitatorum substituemus & commodiora nomina *parabola*, *hyperbola*, *ellipsis*, quod certè monitum oportere videbatur.)

I. Si *parabola* manente diametro circumducta restituitur denuò unde processerat; à parabola interceptam figuram appellari *conoïdes parabolicum*; & *axem* quidem illius vocari *manentem diametrum*: *Verticem* verò punctum, quo axis occurrit superfici ei conoidis.

Exempli gratià, *conoïdis*  $BVA$  producti è revolutione semi-parabola  $BVK$  circa diametrum  $VK$ , axis est  $VK$ , vertex  $V$ .

Fig. 107.

II. Si *conoïdes parabolicum* contingat planum, tangenti autem plano ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abscindat; interceptam à sectione conoidis in abscindente plano planum appellari *basin abscissa portionis*: *verticem* verò punctum, ad quod alterum planum *conoïdes* tangit: *Axem* verò ex ducta per verticem ad conoidis axem parallela interceptam in portione rectam.

\* Contemplanda verò proponantur hæc; quod &c. sub-  
jicit prop.

*Parabolicum conoïdes*  $BVA$  tangat planum  $DT$  in  $D$ ; & huic parallelum planum  $GS$  fecer; sitque recta  $DE$  *conoïdis* axis  $VK$  parallela; sit portio  $SDG$ ,cujus *basis*  $SHG$ , *vertex*  $D$ , *axis*  $DE$ .

\* τὸς ὁρίσσει  
vocat author,  
nos nstatum  
jameconen sub-  
jogamus.

III. \*De *conoïde verò hyperbolico* præstruebamus hæc: si in plano sit *hyperbola*, ejusque diameter, & sectionis \**asymptoti*, diametro autem manente circumductum planum in quo sunt dictæ lineæ restituitur unde processerat; de *hyperbola asymptotis* perspicuum est, quod conum *Isocelem* intercipient, cujus vertex erit punctum, in quo *asymptoti* conveniunt, *axis* verò *diameter manens*: ab *hyperbola* verò interceptam figuram vocari *conoïdes hyperbolicum*; *Axem* verò diametrum qui manet; *Verticem* autem punctum, in quo axis occurrit superfici ei conoidis: Conum verò ab *hyperbola asymptotis* interceptum, conoidis continentem dici: rectam verò conoidis, & coni ipsum continentis verticibus interjectum axi accedentem nominari.

Si e. g. *hyperbola*  $BVA$  cum *asymptotis* suis  $CM$ ,  $CN$  circa diametrum  $CVK$  revolvatur, fiet *conoïdes hyperbolicum*  $BVA$ , ipsumq;

com-

complectens *conus* M C N, cujus *vertex* C, *axis* C K; ipsius autem *conoidis axis* est V K, *vertex* V, *axi* accedens V C:

IV. Et si *conoides hyperbolicum* tangat planum, tangenti autem plano parallelum aliud planum portionem abscindat *conoidis*; planum quidem à sectione *conoidis* in abscindentis plano interceptum appellari *basin* portionis abscissæ; *verticem* verò punctum quo planum tangens contingit *conoides*: Axem verò ex ducta per *verticem* portionis, & *verticem* cono *conoides* continentis interceptam in portionem rectam, & dictis *verticibus* interjectam *axi* accedentem nuncupari.

Fig. 104.

E. G. *Conoides hyperbolicum* B V A tangat planum T D in D, & huic parallelum S G fecet, & per *hyperbolæ* centrum C ducatur recta C D E; erit facta portio S D G, cujus *basis* S H G, *vertex* D, *axis* D E, *axi* accedens D C.

V. *Parabolica* utiq; *conoidea* omnia\* *similia* sunt. *Hyperbolicorum* verò\* *Utique similitudinem latitudinem lato sensu capit, aliis omnia parabolica conoidea non magis sibi similes sunt quam omnes cono.*

Hinc colligitur *hyperbolarum similitum* definitio ex *Archimedis* sententia; nempe, *Hyperbolæ* *similes* sunt, quarum *figuræ* *similes*, vel quarum *latera* *sunt proportionalia* \*

Fig. 110.

III.

Sed intellige *figuras* ad *axes* solos, non ad *alias diametros* (saltem ad *similes diametros*, hoc est eas quæ æquales cum ordinatim applicatis angulos faciunt) constitui.

\* vel, quarum *diametri conjugate sunt proportionales.*

Sint enim *hyperbolæ* B V A, *b v a*; quarum *asymptoti* C M, C N, & *cm, cn*; *axes* C K, *ck*, quibus *perpendiculares* M N, *m n*; & his *parallelæ* R S, *r s* per *vertices* V, *v* ductæ, adeoque *tangentes*. Sit verò C K, M N :: *ck, mn*. ergo cono *conoidea hyperbolica*, ex *hyperbolarum* B V A, *b v a* circa *axes* C K, *ck* *revolutione* progenerata, continent *similes*. Sint autem *hyperbolæ* B V A *latera* T. R. & *hyperbolæ* *b v a* *latera* t. r. & quia T. R. :: C V q. V R q. :: C K q. K M q. :: Q. *ck* Q. *km* :: Q. *cv* Q. *vr* :: t. r. liquet esse T. R. :: t. r. ergo *similitum hyperbolicorum conoideon hyperbolis* convenit habere *latera proportionalia*. Hæ verò ex *Archimedis* sententia *similes* censentur.

De *sphaeroidibus* verò *figuris* hæc supposuimus.

VI. Si *ellipsis* manente *majori diametro* *circumducta* restituitur *Proponitur autem contentum quod ellipsoide oblongum.* Quod si manente *minori diametro* *circumducta* *ellipsoide* restituitur unde processit, *descriptam* ab *ellipsoide* *figuram* appellari *sphaeroides oblongum*. Quod si manente *minori diametro* *circumducta* *ellipsoide* restituitur unde processit, *descriptam* ab *ellipsoide* *figuram* vocari *sphaeroides oblongum*. *Ecce subjicit Prop.*

*sphaeroides oblongum.*

*sphæroides prolatum* : utriusque verò sphæroidis *axem* appellari manentem diametrum : *verticem* verò punctum, quo axis occurrit superficiæ sphæroidis : *centrum* verò dici punctum axis medium ; & diametrum, ductam per centrum axi perpendicularem.

Sit e.g. *ellipsis*  $V B X A$ , ejus major diameter  $V X$  minorem  $B A$  secet perpendiculariter in  $C$  ; si circa  $V X$  revolvatur *ellipsis*, fiet *sphæroides oblongum*, cujus *axis*  $V X$ , *vertices*  $V, X$  ; *diameter*  $B A$  ; sin vero circa  $B A$  rotetur, procreabitur *sphæroides prolatum*, cujus *axis*  $B A$ , *vertices*  $B, A$ , *diameter*  $V X$ , *centrum* verò utriusque est punctum  $C$ .

Fig. 113.

VII. Et si utrumvis *sphæroides* contingant parallela plana, non secantia ; tangentibus autem planis parallelum ducatur aliud planum, secans sphæroides ; productarum quidem portionum *basin* appellari quod à sphæroidis in plano secanti sectione intercipitur : *vertices* autem puncta, ad quæ parallela plana *sphæroides* contingunt : *Axes* vero, quæ è recta vertices connectente in portionibus intercipiuntur, rectas.

*Sphæroides* videlicet  $Q S D G$  tangant parallela plana  $D T, Q Y$ , & his parallelum planum  $S H G$  secet ; cui occurrat tactus connectens  $D Q$  in  $E$  ; erit sectio  $S H G$  batis ; &  $D, Q$  vertices ; &  $D E, Q E$  axes portionum  $S D G, S Q G$ .

VIII. Similes verò dici *sphæroides figuras*, quarum axes diametris proportionales sunt.

Hinc ex *Archimedis* sententia *similes ellipses* definiuntur, quarum axes conjugati sunt proportionales ; vel quarum ad axes figuræ similes, vel quarum latera proportionalia.

IX. Similes verò dici *sphæroideon*, & *conoideon* figurarum portiones, siquidem à similibus figuris ablatae sunt, & bases similes habent, & axes ipsorum vel basium planis recti existentes, vel cum homologis basium diametris æquales facientes angulos, eandem inter se rationem habent, quam homologi basium diametri.

Sint nempe portiones  $B V A$ , *bva* à similibus conoidibus vel sphæroidibus diremptæ, quarum axes  $V K, vk$  cum basium diametris  $B A, ba$  ; &  $H F, hf$  æquales faciant angulos ; & sit  $V K. vk :: B A. ba :: H F. hf$  ; juxta definitionem hanc similes erunt hæ portiones.

Proponitur & de sphæroideis hæc speculari, quod &c. (subjicit prop. . . . .)

Disctis verò theorematibus demonstratis per ipsa reperiuntur complura cum theoremata tum problemata, quale est hoc : quod *similia sphæroidea*, nec non *similes sphæroideum, ac conoideum* portiones triplicatam inter

Fig. 114.  
115.

inter se rationem habent axium. Et, quòd in sphaeroidibus figuris equalibus quadrata diametrorum proportionem reciprocantur axibus; & si in sphaeroidibus figuris quadrata diametrorum reciprocantur axibus, equalia sunt sphaeroidea. Problema verò huiusmodi: *A datâ portione* \* hoc est, *Pro-* sphaeroidis aut conoidis, portionem abscindere plano ad datum planum positiones Lem- parallelo, ita ut abscissa portio agetur dato cono, vel cylindro, vel data *maticas*, vel sphaera. Præmittentes igitur & theorematâ, & \*epitagnata ad eo- *subsidiarias.* rum demonstrationes usum habentia, postea tibi problemata conscribemus. Vale.

X. Si conus plano secetur in omnia coni latera incidenti, sectio vel circulus erit vel ellipsis: & siquidem igitur sectio sit circulus, li- *Sto' quæ.* quet interceptam ab ipso portionem versùs verticem coni, fore conum. Si verò sectio sit ellipsis, è cono ad verticem dirempta figura dicatur *absegmentum* coni: Absegmenti verò basis dicatur *planum* ab ellipse comprehensum: *vertex* verò punctum, quod & coni *vertex* est: *Axis* verò à vertice coni ad centrum ellipsis connexa recta.

XI. Ac, si cylindrus duobus planis parallelis secetur in omnia cylindri latera incidentibus, sectiones vel circuli erunt, vel ellipses *æ-* *quales*, & mutuò sibi similes. Siquidem igitur sectiones circuli fiant, patet quòd resecta à cylindro figura inter parallela plana, cylindrus erit: sin verò sectiones fiant ellipses, absumpta à cylindro figura inter parallela plana cylindri segmentum vocetur: *bases* autem segmenti vocentur plana sub ellipsis comprehensa: *Axis* autem recta ellipsium centra connectens. (Erit autem hæc in eadem recta cum axe cylindri.)

Hæc clara sunt, nec explicationem desiderant. Videntur autem loco suo excidisse; nos ea certè non immeritò definitionibus ac hypothesis accensemus. Non sunt epitagnata, quæ pollicetur *Archimedes*, ut existimat non nemo.

### Prop. I.

Si quotlibet sint magnitudines (a, b, c, d) equali sese excedentes, sit *Fig. 116.* autem excessus equalis minima (a); & alia magnitudines multitudine quidem equalis his, magnitudine verò equalis maxima (d); omnes magnitudines, quarum unaquæque aequatur maximæ, omnium quidem equaliter sese excedentium minores erunt quàm duplæ; reliquarum autem siue maximâ majores quàm duplæ.

Nam summa omnium æqualium maximæ est

$$\begin{array}{r} d \\ c + a \\ b + b \\ a + c \\ \hline \end{array}$$

hoc est  $d + 2c + 2b + 2a$ ; quæ summa deficit à dupla omnium per maximam  $d$ , & reliquarum duplam eodem excessu superat.

*Schol.*

o. 3. 6. 9.

9. 6. 9. c.

9. 9. 9. 9.

1. Si quantorum talis series (hoc est Arithmeticè proportionalium) incipiat à o (seu nihilo) & maximus terminus sit  $d$ , numerus autem terminorum dicatur  $n$ ; summa terminorum erit  $\frac{nd}{2}$ , quæ propositio nihil fermè differt ab hac *Archimedeæ*.

$a + c$ .

$a + 1x$ .

$a + 2x$ .

$a + 3x$ .

2. Sit quælibet series Arithmeticè proportionalium, in qua minimus terminus sit  $a$  communis excessus  $x$ , & numerus terminorum dicatur  $n$ ; liquet omnium summam esse  $na + \frac{nn}{2}x$ .

Nam hæc summa constat ex serie æqualium, & serie arithmetica à nihilo incipiente, cujus maximus terminus est  $nx - 1x$ .

### Prop. II.

Si quotvis magnitudines (A, B, C, D) aliis magnitudinibus multitudine æqualibus (E, F, G, H) bina binis, prout ordine disponuntur, proportionales sint A.B::E.F & B.C::F.G &c); \*referantur verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines (K, L, M) vel omnes, vel ipsarum aliquæ in quibusvis rationibus. (ita ut, homologæ sint in iisdem rationibus (A.K::E.N. & B.L::F.O &c.) Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuscum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes posteriores magnitudines ad omnes quas ipsæ respiciunt.

\* rationem habent.

A.B.C.D. E.F.G.H.

K.L.M. N.O.P.

verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines (K, L, M) vel omnes, vel ipsarum aliquæ in quibusvis rationibus. (ita ut, homologæ sint in iisdem rationibus (A.K::E.N. & B.L::F.O &c.) Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuscum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes posteriores magnitudines ad omnes quas ipsæ respiciunt.

a hyp & cor. 45  
b hyp.  
c 18. 5.

Nam ob K. A<sup>a</sup>::N.E. & A.B<sup>b</sup>::E.F. & B.L<sup>b</sup>::F.O. erit ex æquo K.L::N.O. Similique discursu L.M::O.P. Est autem A+B+C+D, A<sup>a</sup>::E+F+G+H.E. & A.K<sup>b</sup>::E.N. & K.K+L

+



$$\begin{aligned} &+ M :: N. N + O + P. \text{ ergo ex æquo } A + B + C + D. K + L \\ &+ M :: E + F + G + H. N + O + P. \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$

## Prop. III.

Si quocunque sint linea (X) æquales inter se, & earum unicuique spatium applicetur excedens figurâ quadratâ, latera verò (A, B, C, D) excessuum equali sese excedant, & sit excessus equalis minimo (A); sint verò etiam alia spatia. multitudine quidem equalia his, sed magnitudine singula equalia maximo (D X + Dq): hæc ad omnia quidem alia spatia minorem habebunt rationem eâ, quam habet equalis utrique simul & lateri maximi excedentis quadrati, & uni equalium, ad æqualem utrique simul, & tertiæ parti lateris maximi excedentis quadrati, & semissi unius equalium; ad reliqua verò spatia sine maximo maiorem rationem habebunt, eâdem ratione. Fig. 117.

Hoc est (si linearum multitudo dicatur  $n$ , & inæqualium spatiorum aggregatum dicatur Z) erit  $nDX + nDq$ ,  $Z \supset X + D. \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}D$ . &  $nDX + nDq, Z \supset DX + Dq \subset X + D. \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}D$ .

1. Nam quia sunt AX, BX, CX, DX ut A, B, C, D; hoc <sup>a 1. 6.</sup> est juxta primam hujus <sup>b 1. hujus.</sup>, erit  $AX + BX + CX + DX \subset$  <sup>c 1. cor. 10. de</sup>  $\frac{nDX}{2}$ . <sup>d hyp.</sup> item  $Aq + Bq + Cq + Dq \subset \frac{nDq}{3}$ . est verò Z <sup>e 3. 5.</sup>  $\frac{nDX}{2} + \frac{nDq}{3}$ .  $AX + Aq + BX + Bq + CX + Cq + DX + Dq$ . ergo  $nDX + nDq, Z \supset (nDX + nDq. \frac{nDX}{2} + \frac{nDq}{3} ::) X + D. \frac{X}{2} + \frac{D}{3}$ . Q.E.D.

2. Porro, quia  $AX + BX + CX \supset \frac{nDX}{2}$ , &  $Aq + Bq$  <sup>f 2. cor. 10. de</sup>  $\frac{nDq}{3}$ . <sup>helic.</sup>  $+ Cq \supset \frac{nDq}{3}$ . erit  $nDX + nDq, AX + Aq + BX + Bq + CX + Cq$  <sup>d hoc est</sup>  $nDX + nDq, Z \supset DX + Dq$ . <sup>e</sup>  $\subset nDX + nDq. \frac{nDX}{2} + \frac{nDq}{3} :: X + D. \frac{X}{2} + \frac{D}{3}$ . Q.E.D.

## Prop. I V.

Fig. 118.

Si ab eadem parabola quomodocunque dua refecentur portiones (BVA, SDG) quæ æquales habeant diametros (VK, DE); tam ipsæ portiones æquales erunt, quàm ipsis inscripta triangula (BVA, SDG) basim habentia eandem cum portionibus; & eandem altitudinem.

a sch 49. 1.

Apol.

b 1. 6.

c 7. 5.

d 11. &amp; 49. 1.

Apol.

e 9. 5.

f 1. 6.

Sit primùm AK ad VK perpendicularis; & R, S sint parametri diametrorum VK, DE ergo ductâ GL ad DE (protractam) perpendiculari, est GE. GL<sup>a</sup> :: S. R :: <sup>b</sup> S \* VK. R \* VK :: S \* DE. R \* VK :: GE. AK. unde GL = AK ergo triangula GDE. AVK æquantur, & horum dupla triangula GDS, AVB; & horum squialteræ parabolæ GDS, AVB. Q.E.D. Simili discursu quavis alia portio parem habens ipsi VK diametrum portioni BVA, adeoque portioni SDG æquabitur: unde constat propositum.

Cor. Si diametri VK, DE portionum æquantur, perpendiculares GL, AK æquabuntur.

## Prop. V.

Fig 119.

120.

Omne spatium comprehensum ab ellipse (VBXA) ad circulum (VEX<sup>a</sup>) habentem diametrum æqualem majori ellipsis diametro (VX) eandem rationem habet, quam minor ejus diameter (BA) ad majorem (VX), hoc est ad circuli (VEX<sup>a</sup>) diametrum.

<sup>a</sup> intellige, spatium Elliptico.

a 8. 1. de sph.

e 21. 1. Apol.

d 1. 6.

e 22. 6.

f 12. 5.

g 1. 6.

h 1. 12.

k 9. 5.

Dico circulum diametro Z =  $\sqrt{VX \times BA}$  æquari \*ellipsi. Si negas, esto primùm circulus Z major ellipse; circulo igitur Z<sup>a</sup> inscriptum cogita polygonum parilaterum majus ellipse, & huic simile aliud circulo (VEX<sup>a</sup>), à cujus angulis demittantur perpendiculares  $\mu D$ ,  $\nu E$  &c. occurrentes ellipsi punctis M, N &c. & connectantur BM, MN, NV &c. Estque jam  $\epsilon Cq. \mu Dq :: XC \times CV. XD \times DV :: B Cq. M Dq.$  & permutando  $\epsilon Cq. B Cq :: \mu Dq. M Dq.$  unde  $\epsilon C. BC$  (hoc est triang  $\epsilon DC. BDC$ )  $\epsilon :: \mu D. MD$  (hoc est triang  $\mu \epsilon D. MBD$ ). <sup>f</sup> quare  $\epsilon C. BC ::$  trapezium  $\epsilon CD \mu. BCDM$ . Simili discursu est trap  $\mu DE \nu. MDEN :: \mu D. MD :: \epsilon C. BC$ . idemque pariter ostendetur de reliquis trapeziis ac triangulis. <sup>f</sup> quare totum polygonum circuli VEX<sup>a</sup> ad totum polygonum ellipsis se habet ut  $\epsilon C$  ad BC, vel VX ad BA; <sup>g</sup> hoc est ut VXq ad VX \* BA, <sup>h</sup> hoc est ut polygonum circuli VEX<sup>a</sup> ad polygonum circuli Z. <sup>k</sup> ergo

go polygonum circuliZ ellipsis polygono æquatur; Sed majus erat toto spatio elliptico, quæ repugnant. Similis continget repugnantia, <sup>19. ax. 1.</sup> si dicatur ellipsis major circulo Z; inscribendo scilicet ellipsi figuram quæ major sit circulo Z, & per ejus angulos ducendo perpendiculares DM<sup>μ</sup>. EN<sup>ν</sup>, &c. & inscribendo circulo Z figuram similem ipsi V<sup>ν</sup>μ<sup>μ</sup>ε X; unde demonstrabitur figura ellipsis æqualis figuræ circuli Z, quæ tamen toto circulo Z major ponebatur: ergo potius <sup>P 7. 5.</sup> <sup>q 2. 12.</sup> <sup>r hyp.</sup> <sup>s 1. 6.</sup> circulus Z ellipsi æquatur. Hinc ellipsis se habet ad circulum Vε X α, <sup>ut</sup> circulus Z ad circulum Vε X α, <sup>hoc est</sup> ut Zq<sup>r</sup> vel V X \* B A ad V Xq, <sup>hoc est</sup> ut B A ad V X. *Q.E.D.*

Facile colligitur hoc viâ indivisibilem. Quoniam ε Cq. μ Dq :: <sup>21. 1. Apoll.</sup> X C \* C V. X D \* D V :: B Cq. M Dq. erit ε C. B C :: μ D. M D <sup>\* 12. 5.</sup> :: ν E. N E. \* :: ε C - μ D + ν E. B C - M D + N E. & omnes ε C, μ D, ν E componunt semicirculum Vε X, omnes verò B C, M D, N E conficiunt semiellipsim V B X; ergo semicirculus ad semiellipsim se habet ut ε C ad B C; vel ut ε α ad B A.

### Prop. VI.

Omne spatium comprehensum ab ellipse (V B X A) ad quemlibet circulum (Z) eandem habet rationem, quam comprehensum ab ellipsis diametris (V X, B A) rectangulum ad quadratum (Zq) diametri circuli. Fig. 121.

Nam ell. V B X A. ⊙ Vε X α<sup>a</sup> :: B A. V X<sup>b</sup> :: B A \* V X. V Xq<sup>a 5. hujus.</sup> & ⊙ Vε X α. ⊙ Z<sup>c</sup> :: V Xq. Zq. ergo ex æquo ell. V B X A. ⊙ Z :: <sup>b 1. 6.</sup> B A \* V X. Zq. *Q.E.D.* c 2. 12.

### Prop. VII.

Sub ellipsis (A B C D, E F G H) comprehensa spatia eandem inter se rationem habent, quam comprehensa ab ellipsis diametris rectangula (A C \* B D, E G \* F H) inter se. Fig. 122. 123.

Sit quisvis circulus diametro Z; estque A C \* B D. Zq<sup>a</sup> :: ellips. A B C D. ⊙ Z. & Zq. E G \* F H<sup>a</sup> :: ⊙ Z. ellips. E F G H, ergo ex æquo A C \* B D. E G \* F H :: ellips. A B C D. E F G H. *Q.E.D.* <sup>a 6 hujus.</sup>

### Coroll.

Hinc liquet comprehensa sub ellipsis similibus spatia homologorum diametrorum quadratis proportionalia fore.

Nempe

Nempe posito fore  $AC \cdot BD :: EG \cdot FH$ ; erit ellips  $ABCD$ .  
 $EFGH :: ACq \cdot EGq :: BDq \cdot FHq$ . Nam  $AC \times BD \cdot BDq ::$   
 $AC \cdot BD :: EG \cdot FH :: EG \times FH \cdot EHq$ . & permutando  $AC \times BD$ .  
 $EG \times FH :: BDq \cdot FHq$ , hoc est ellips  $ABCD$ .  $EFGH :: BDq \cdot$   
 $FHq$ , vel  $ACq \cdot EGq$ .

## Lemmata.

## I.

Fig. 124.

Sit conus Scalenus, in quo  $BV$  A triangulum per axem rectum basi  
 $BFA$ ; recta verò  $VK$  bisecet angulum  $BVA$ , &  $BD$  sit ad  $VK$   
 perpendicularis; si igitur per  $BD$  transeat planum  $BED$  triangulo  
 $BVA$  rectum, patet ellipsim fieri, cujus centrum  $C$  minor axis  $BD$ ;  
 quòd si ducatur  $CE$  ad  $BD$  perpendicularis in dicto plano  $BED$ ,  
 erit  $CE$  semiaxis major; &  $CE$  plano  $VBA$  recta erit, adeoque  
 planum per  $VC$ ,  $CE$  plano  $VBA$  quoque rectum erit. Producatur  
 $VE$ , occurrens basi coni in  $F$ , & connectatur  $FK$ .<sup>a</sup> liquet  $FK$  (com-  
 munem nempe sectionem planorum  $(BFA, VCE)$  rectam esse pla-  
 no  $VBA$ ; adeoque parallelam ipsi  $CE$ ,<sup>f</sup> & perpendiculararem ipsi  
 $BA$ . Est igitur  $KFq (BK \times KA)$ .  $VKq :: CEq \cdot CVq$ . Hæc ana-  
 lysis est *Archimedei* quod subsequitur *problematis*, perspicuitatis ergò  
 apposita; quali similem decimæ propositionis intelligentiæ condu-  
 centem, hujus exemplo, tibi deducendam relinquimus.

a 13. 1. *Apol.*  
 b 4. *def.* 11.  
 c 18. 11.  
 d 19. 11.  
 e 6. 11.

f 3. *def.* 11.  
 g 4. & 22. 6.

## II.

Fig. 125.

Recta  $VC$  bisecet angulum  $BVA$ , &  $BD$  ad  $VC$  perpendicularis  
 sit; oportet per  $B$  ducere rectam  $BA$  occurrentem rectæ  $VC$  pro-  
 tractæ in  $K$ , ita ut  $VKq$  ad  $BK \times KA$  rationem habeat datam  $VCq$   
 ad  $Tq$ .

a 13. 6.  
 b 35. 3.  
 c *const.* & 15. 1.  
 d 4. 6.  
 e 16. 6.  
 f *const.* & 17. 6.  
 g *sch.* 23. 6.  
 h 7. & 11. 5.  
 i *const.* & 5. 1.  
 m 16. 1.  
 n *sch.* 6. 6.  
 o *sch.* 16. 6.

Fiat  $VC \cdot T :: T \cdot CH$ ; & ad  $CH$  describatur segmentum cir-  
 culi capiens angulum æqualem angulo  $CVB$ , & secet iste circulus  
 rectam  $VD$  in  $M$ ; & ductis  $MCN$ ,  $MH$ , fiat  $BA$  ad  $NM$  paral-  
 lela. Dico factum. Nam ob æquiangula triangula  $CVN$ ,  $CMH$ ,  
 erit  $VC \cdot MC :: CN \cdot CH$ . unde  $MC \times CN = VC \times CH =$   
 $Tq$ . Est autem  $V Cq \cdot CM \times CN :: V Kq \cdot KB \times KA$ .<sup>b</sup> ergo  
 $V Cq \cdot Tq :: V Kq \cdot KB \times KA$ . *Q.E.F.*

Not. debet esse  $T \sqsubset B C$ . quia quum angulus  $CDM$  sit æqualis  
 angulo  $CBX$ ,<sup>m</sup> hoc est major angulo  $CNB$ ,<sup>n</sup> erit  $MC \cdot CD \sqsubset$   
 $CB \cdot CN$ .<sup>o</sup> adeoque  $MC \cdot CN \sqsubset CD \cdot CB$ , hoc est  $Tq \sqsubset$   
 $B Cq$ .

Prop.





## Prop. VIII.

*Data ellipse, & lineâ (C V) à centro (C) ellipsis excitatâ; ad planum, in quo est ellipsis, rectâ, potest inveniri conus, qui verticem habeat excitatâ lineâ terminum (V) in cujus superficie sit ellipsis data.* Fig. 126.

Sit B D minor axis, & semiaxis major sit T. Jungantur B V, a *Leimm. præc.*  
D V, & fiat T q. C V q. :: B K \* K A. V K q. (quod fieri potest, quia T  
= B C). Erit B A diameter basis coni, cujus vertex V, qui comple-  
ctitur datam ellipsim.

Sit enim punctum quodvis L in ellipse, à quo demittatur L H per-  
pendicularis ad B D <sup>b</sup> (adeoque recta plano V B D, cui recto insitit <sup>b</sup> 4. def. VI.  
planum ellipsis). producat V H M, & assurgat M N plano V B A  
recta, disti coni superficiem attingens in N. Ducantur denuò per K,  
M rectæ P Q, R S ad B D parallelæ. Estque T q. C V q. :: B K \* <sup>c</sup> conf.  
K A. V K q. & C V q. C B q. :: K V q. K P q. :: K V q. K P \* K Q. ergo <sup>d</sup> 4. & 21. 6.  
ex æquo I q. C B q. (hoc est H L q. B H \* H D) :: B K \* K A. K P \* <sup>e</sup> 7. 6.  
K Q :: B M \* M A. R M \* M S. Item B H \* H D. H V q. :: R M <sup>f</sup> 21. I Apoll.  
\* M S. M V q. ergo rursus ex æquo H L q. H V q. :: B M \* M A. <sup>g</sup> sch. 23. 6.  
M V q. (hoc est) :: M N q. M V q. unde H L. H V :: M N. M V. <sup>h</sup> 35. 3. & 7. 5.  
<sup>m</sup> quare V L N est recta lineâ; adeoque punctum L in superficie co- <sup>i</sup> 22. 6.  
ni. Similique ratione tota ellipsis est in eadem superficie. Q.E.F. <sup>m</sup> conv. 4. 6.  
<sup>n</sup> 1. I. Apoll.

## Prop. IX.

*Data ellipse & lineâ (C V) ab ellipsis centro (C) non recto exci- Fig. 127.  
tatâ in plano, quod per unam diametrum (B D) assurgit rectum plano,  
in quo est ellipsis; potest inveniri conus, verticem habens excitatâ ter-  
minum (V), in cujus superficie erit data ellipsis.*

Conjungantur V B, V D, & fiat V A = V B; & connexâ B A,  
per C ducatur E F ad B A parallela. Sit autem T altera semidiameter  
datæ ellipsis; & fiat E C \* C F. T q. :: B A q. S q.; tum in plano per <sup>a</sup> 13. & 12. 6.  
B A ad planum V B A recto <sup>b</sup> descripta sit ellipsis, cujus axes A B, S. <sup>b</sup> 54. I Apol.  
Hanc complectatur conus habens verticem V (juxta præcedentem;  
is quoque datam ellipsim comprehender. Sumatur enim in data ellip-  
se quodvis punctum L, à quo ducatur L H perpendicularis rectæ B D  
& adeoque recta plano V B D) & extendatur V H M; & M N re- <sup>c</sup> 4. def. 12.  
cta plano V B A (hoc est in plano repertæ ellipsis) coni superficiem  
atingat in N; & per M ducatur R S ad B D parallela. Estque T q.  
E C.

d *consp.*  
e 15. r.  
f 21. I *Apoll.*  
g *sch.* 23. 6.  
h 22. & *constr.*  
4 6.

$EC \times CF^d :: Sq. BAq^e :: \frac{1}{4}SQ, \frac{1}{4}BAq :: f MNq. BM \times MA.$  Item  
 $EC \times CF. BC \times CD^e :: BM \times MA. RM \times MS.$  ergo ex æquo  
 $Tq. BC \times CD (f \text{ hoc est } HLq. BH \times HD) :: MNq. RM \times MS.$   
 $^e$  quinetiam  $BH \times HD. V Hq :: RM \times MS. V Mq.$  ergo rursus ex  
 æquo  $HLq. V Hq :: MNq. V Mq.$  hunde patet punctum L esse in  
 latere VN coni; similique jure tota ellipsis est in superficie dicti co-  
 ni. Q. E. F.

Nota, si  $EC \times CF = Tq.$  fore BA diametrum circuli, seu basis  
 dicti coni.

## Prop. X.

Fig. 128.

Datâ ellipse, & lineâ (CD) ab ellipsis centro (C) erectâ in plano,  
 quod ab una diametro (AB) excitatur rectum plano, in quo est ellipsis;  
 potest inveniri cylindrus, axem habens in directum excitata lineâ (CD),  
 cujus in superficie erit data ellipsis.

a *sch.* 2. 6.  
b 4. *def.* 11.  
c *hyp.*  
d 21. I *Apoll.*  
e *sch.* 23. 6.  
f 9. 5.  
g 35. 3.  
h *constr.* & 4.  
def. 11.  
k 6. 11.

Ducantur AF, BG ad CD parallelæ, quas perpendiculariter se-  
 cet: recta FDG; & ob  $AC = CB$ ,  $^a$  est  $FD = DG$ . Jam Si FG  
 aliteræ ellipsis diametro NO æquetur, erit circulus centro D per F,  
 G descriptus, & rectus plano FABG, basis cylindri, quem deside-  
 ramus. Sit enim quodvis punctum H in ellipse; à quo ducatur HK  
 ad AB<sup>b</sup> perpendicularis, & per K ducatur KL ad CD parallela; &  
 sit LM ad FG perpendicularis. & quoniam HKq. NCq<sup>c</sup> (FDq)  
 $:: ^d AK \times KB. ACq^e :: FL \times LG. FDq$ ; erit HKq<sup>f</sup> = FL × LG  
 $= LMq.$  ergo HK, LM sunt pares. Sed & ambæ<sup>h</sup> rectæ sunt pla-  
 no FABG; <sup>k</sup> adeoque parallelæ. ergo liquet punctum H esse in la-  
 tere dicti cylindri per M ducto.

Quòd si NO major sit quàm FG, fiat FP = NO; erit FP di-  
 ameter basis cylindri, itidem rectæ plano FDC. quod è simili con-  
 stabit discursu.

I *sch.* 47. 1.

Sin demùm sit NO minor quàm FG, <sup>1</sup> fiat DX =  $\sqrt{DFq -$   
 $CNq.}$  & plano ACX recta erigatur XR = CN, & connecta-  
 tur DR; erit circulus radio DR, in plano FDR descriptus, basis  
 cylindri, qui datam ellipsim complectetur. Nam stantibus, quæ prius  
 adsumpta sunt, ducantur LS ad FG, & ST ad K-L protractam per-  
 pendiculares. Et quia plana RXD, FD X sibi mutuò <sup>m</sup> recta sunt;  
<sup>n</sup> erit FD recta plano RXD, <sup>o</sup> adeoque lineæ RD; <sup>p</sup> ergo RD,  
 SL parallelæ sunt. Sed & DX, LT <sup>q</sup> parallelæ sunt. <sup>r</sup> ergo trian-  
 gula RD X, SL T similia sunt. <sup>s</sup> Quamobrem est STq. SLq (s FL  
 \* LG)

m 18. 11.  
n 4. *def.* 11:  
o 3. *def.* 11.  
p 28. 1.  
q *constr.*  
r 10. 11.  
s 4. & 22. 6.



\* L G) :: R Xq. R Dq. (D Fq.) nam est R Dq<sup>1</sup> = D Xq + XRq<sup>1</sup> 47. 1.  
<sup>2</sup> = D Fq - C Nq - C Nq = D Fq). Item FL \* L G. AK \* KB<sup>2</sup> ::  
 F Dq. A Cq. ergo ex æquo STq. AK \* KB :: R Xq<sup>1</sup> (N Cq)  
 A Cq<sup>2</sup> :: H Kq. AK \* KB. <sup>3</sup>quare STq = H Kq. ergo cum sint  
 S T, H K parallelæ (perpendiculares enim sunt ambæ plano FAKLT.  
 Nam planum STL<sup>4</sup> rectum est plano FLT; adeoque ST ei re- u 15. 11<sup>1</sup>  
 ctæ) sitque punctum S in superficie dicti cylindri, erit H in eadem, &  
 pari ratione tota data ellipsis. Q. E. F.

Prop. XI.

Quod quidem omnis conus ad conum compositam habeat rationem ex  
 rationibus basium & altitudinum demonstratum est ab antecessoribus; scilicet 15. 12;  
 & non absimili modo demonstratur quod absegmentum omne cono ad ab-  
 segmentum cono rationem habet compositam e rationibus basium & alti-  
 tudinum. Necnon quod omne segmentum cylindri tripla sit absegmenti  
 conici basim habentis eandem cum segmento, & aequalem altitudinem:  
 eadem scilicet est demonstratio cum illa, quod omnis cylindrus triplus est  
 cono basim habentis eandem cum cylindro, & aequalem altitudinem. 10. 12.

Scholium.

Etiam hæc simili discursu eliciantur.

1. Equè alta segmenta cylindrica, & conica, basibus proportio- Vid. 11. 12;  
 nalia sunt.
2. Segmenta ad æquales bases constituta sunt inter se ut altitu- 14. 12;  
 dines.
3. Equalium segmentorum proportionem reciprocantur bases & 15. 12.  
 altitudines.

Similia segmenta triplicatam habent rationem homologorum in ba- 11. 12;  
 sibus diametrorum, (vel axium suorum).

Prop. XII.

Si conoides parabolicum secetur plano (D V K) per axem (V K) vel Pars I.  
 ad axem parallelo (D E G); fiet cono sectio eadem illi, qua figuram A.  
 intercipit; diameter autem ipsius erit communis sectio (V K vel D E)  
 planorum; ejus (D E G) quod figuram secat, & ejus (V D E K) quod Fig. 129<sup>1</sup>  
 per axem ducitur rectum secanti plano. quod si etiam secetur plano ad  
 axem recto (B G A) sectio erit circulus, habens centrum (K) in axe.  
 M Quod

Quod plano per axem procreetur parabola eadem illi cujus circumductu fiebat conoides, quodque plano ad axem recto intercipiatur circulus, in axe centrum habens, satis ex ipsa conoidis generatione perspicuo constat. Quod autem sectio D G sit parabola, primò politæ æqualis sic ostendetur. Sumatur in sectione quodvis punctum G, à quo ducatur G E ad D E perpendicularis, <sup>a</sup>adeoque recta plano V D E (cui nempe planum D E G rectum ponitur). Per E ducatur B A ad D E, vel V K perpendicularis; <sup>b</sup>ergo D E plano per B E, E G recta est; <sup>c</sup>ergo axis V K eidem rectus est; quare B G A est circulus ad diametrum B A. Sit demum R parameter parabolæ B V A, & ducatur D Z ad V K perpendicularis. Estque  $E G q^d = B E \times E A^e = B K q - E K q^f = B K q - D Z q$ . Est verò  $B K q^g = R \times V K$ , &  $D Z q^h = R \times V Z$ ; <sup>f</sup>adeoque  $B K q - D Z q = R \times Z K = R \times D E$ . <sup>h</sup>ergo  $E G q = R \times D E$ . <sup>k</sup>unde sectio D G erit parabola, cujus parameter R.  $\mathcal{Q} : E . D$ .

a 4. def. 11.  
b 4. 11.  
c 8. 11.  
d 35. 3.  
e 5. 2.  
f 3. ax. 1.  
g 11. 1 A. ol.  
h 1. ax. 1.  
k conv. 11.  
1. A. ol.

**Pars 2. B.** Si conoides hyperbolicum secetur plano (D V K) per axem (V K) vel ad axem parallelo (D E G) vel (plano D E H) per conoidis complectentis verticem (C) erit sectio hyperbole; siquidem per axem eadem erit ei quæ figuram concepit; sin æquidistanter axi, similis illi; at si per verticem conoidis complectentis, dissimilis ei. diameter autem sectionis erit communis sectio (V K, vel D E, vel D F) planorum; ejus quod secat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum secanti plano. Quod si secetur plano (B G A) ad axem recto sectio erit circulus habens centrum in axe.

a hyp. & 4 def.  
1.  
b 35. 3.  
c 5. 2.  
d 12. 1 A. ol.  
e 1. 6.

Quod sectio (D V K) per axem hyperbolam reddit illam, quæ conoides ipsam progenuit; & quod planum axi rectum intercipiat circulum, satis evidens est. Quod si D E sit axi parallela; sint T V, V R latera hyperbolæ D V K, & à D ducatur D Z ad V K parallela; & protractâ E D fiat  $D X = T Z + V Z$  ( $T V + 2 V Z$ ). &  $T V . V R :: X D . D S$ ; faciunt verò T V, V R, & X D, D S angulos utrunque; & connexæ T R, X S producantur. Sumatur jam in sectione punctum quodvis G; à quo ducatur G E ad D E, <sup>a</sup>(adeoque ad planum D V K) perpendicularis; & per E ducatur B A ad V K perpendicularis, & E L ad D S parallela; denique per puncta Z, K ducantur Z Q, K P ad V R parallela. Estque jam  $E G q^b = B E \times E A^c = B K q - E K q = B K q - D Z q^d = V K \times K P - V Z \times Z Q$ . verum (ductâ Q Y ad V K parallelâ) est  $V K \times K P^e = V Z \times Z Q$

+

$\perp YP + QY \times KP = VZ \times ZQ \perp VZ \times YP + QY \times KP.$  f 2. ax. 1.  
<sup>f</sup> ergo  $EGq = VZ \times YP \perp QY \times KP.$  est autem  $XD, DS ::$  g const.  
 $TV, VR.$  hoc est  $XE, EL :: QY, YP;$  (vel)  $:: DE, YP.$  h 4. 6. & 11. 5.  
<sup>o</sup> adeoque  $EL \times DE = XE \times YP^1 = TK \perp VZ \times YP^c = TK \times YP$  k 16. 6.  
 $\perp VZ \times YP$  (hoc est)  $= QY \times KP \perp VZ \times YP;$  (ob  $TK, KP$  l const.  
 $m :: QY, YP;$  <sup>k</sup> adeoque  $TK \times YP = QY \times KP$ ) <sup>n</sup> ergo  $EGq =$  m 4. 6.  
 $EL \times DE.$  <sup>o</sup> quare liquet punctum  $G$  esse in hyperbola, cujus latera n 1. ax. 1.  
 $XD, DS,$  diameter  $DE;$  quæ quidem hyperbola similis est ipsi o conv. 12.  
 $BVA,$  quia  $XD, DS :: TV, VR.$  *Q.E.D.* I Apoll.

*Coroll.*  $XD = TV \perp VZ = 2CZ.$

$$DS = VR \perp \frac{VR}{TV} 2VZ.$$

Quod verò plani sectionem attinet per centrum  $C$  ductam, produ-  
 catur  $FD$  ad  $N,$  ita ut sit  $CN = CD;$  & sectionem  $DK$  tan-  
 gant rectæ  $VM, DM;$  & sumpto in sectione  $DF$  puncto quovis  $H$   
 ducatur  $HF$  ad  $DF$  perpendicularis, (adeoque recta plano  $FDVK$ )  
 & per  $F$  ducantur  $BA$  ad  $VK$  perpendicularis, &  $FO$  ad  $DM$  pa-  
 rallela. Estque  $BF \times FA. (FHq).$   $FOq^p :: MVq. MDq.$  ergo p 16. 3 Apoll.  
 ordinatim applicatarum  $FH$  in sectione  $DH$  quadrata <sup>q</sup> se habent ut q 16. 5.  
 quadrata  $FO$  in sectione  $DO,$  hoc est ut rectangula  $NFD.$  <sup>r 21. I Apoll.</sup> ergo & cor. 5 1. 1.  
 $DH$  est hyperbole, cujus  $ND$  est axis transversus. quia verò  $EGq$  s conv. 21.  
<sup>a</sup>  $\perp FHq;$  &  $XE \times ED \perp NF \times FD$  (quia  $DE \perp DF$  &  $XD$  t cor. 5. 2.  
 $= 2CZ \perp 2CD$ ) non erit  $EGq. XE \times ED :: FHq. NF \times FD;$  <sup>u 21. I Apoll.</sup> hoc y prius.  
 est non erunt harum sectionum latera sibi proportionalia; nec ideo  
 similes erunt. ergo cum sectio  $DG$  sit ipsi  $BVA$  similis; erit sectio  
 $DH$  eidem dissimilis. *Q.E.D.*

*Si quodvis sphaeroides secetur plano (VBXA) per axem (VX) Pars 3. C.*  
*vel ad axem parallelo (DEL) sectio erit ellipsis, siquidem per axem,*  
*ipsa illa quæ figuram concepit; sin æquidistanter axi, similis ei; dia-* Fig. 131.  
*meter verò sectionis erit communis sectio (DE) planorum; ejus nem-*  
*pe quod secat figuram, ejusq; quod per axem ducitur rectum secanti*  
*plano: quinetiam si secetur plano recto ad axem, sectio circulus erit,*  
*habens centrum in axe.*

Primum & ultimum è sphaeroidis ortu satis liquidò verificantur.

a 16. 3. *Apol.*  
 b *conv.* 32.  
 1. *Apol.* & 33.  
 1. *elem.*  
 c 4. & 22. 6.  
 d 11. 5.  
 e *conv.* 21.  
 1. *Apol.*  
 f *constr.*  
 g 15. 5.

Porro recta A V connectat axium (A B, V X) terminos A, V; & ducatur E S ad A V, & D S ad A B parallelæ. Sumatur autem ut-  
 cunque punctum L in sectione, à quo ducatur L H ad D E perpendi-  
 cularis; & per H recta M N ad V X perpendicularis. demum re-  
 ctæ A T, V T sectionem V A X contingant. Estque M H \* H N  
 (H L q) D H \* H E :: V T q. A T q<sup>b</sup> :: C A q. C V q<sup>c</sup> :: D S q. D E q.  
<sup>d</sup> :: H L q. D H \* H E. <sup>e</sup> ergo sectio D L E est ellipsis, cujus axes  
 sunt D E, D S; & similis ipsi V B X A; quia D S. D E<sup>f</sup> :: C A.  
 C V<sup>g</sup> :: B A. V X.

Pars 4. D.

Fig. 132.

Si dictarum figurarum qualibet plano (B V A) per axem (V K) se-  
 cetur, à punctis (G) in superficie figura extra sectionem existentibus  
 ductæ ad planum secans perpendiculares (G E), intra figura sectionem  
 cadent.

a 18 11.  
 b *prins.*  
 c 38. 11.  
 \*

Per G ducatur planum axi, <sup>a</sup> (adeoque plano per axem) rectum;  
<sup>b</sup> ergo communis sectio B A erit diameter circuli B G A. <sup>c</sup> & perpen-  
 dicularis G E cadet in B A. \* ergo punctum E est intra sectionem  
 B V A. Cunctis his subjecit *Archimedes*: Horum omnium perspi-  
 cuæ sunt demonstrationes. Ita visum illi *ἔξουδεναι*. Nos tamen lucem  
 iis qualemcunque conati sumus accommodare; non nemo certe spissas  
 tenebras offudit. (Cui placet immani tædio vexari, *Rivaltum* adeat in  
 hæc commentantem, ipsiusque desiderio, ni fallor, abundè satisfiet).

### Prop. XIII.

Fig. 133.

Si concides parabolæ cum plano secetur, neque per axem (V K) nec  
 aquidistanter axi, sectio (D L E) erit ellipsis. Diameter autem ejus  
 major, erit recta (D E) intercepta in conoide à facta sectione planorum  
 & ejus quod figuram secat, & ejus quod per axem transit rectum se-  
 cantis plano: minor autem diameter aequalis erit distantia (D F) du-  
 ctarum à majoris diametri terminis axi parallelarum (D Q, E F).

a *hyp.* & 4. *def.*  
 11.  
 b 35. 1. *Apol.*  
 c 2. 6.  
 d 7. 5.  
 e 4. & 22. 6.  
 f 16. 3. *Apol.*  
 g 11. 5.  
 h 21. 1. *Apol.*

Capiatur enim in sectione punctum quodvis L, à quo ducatur L H  
 ipsi D E, <sup>a</sup> adeoque plano V D E, perpendicularis. & per H ducatur  
 B A axi perpendicularis. Rectæ porro T S ad D E, & V N ad B A  
 parallelæ tangent sectionem D V E, & ducatur T P ad V K perpen-  
 dicularis. Estque ob V S<sup>b</sup> = P V, <sup>c</sup> etiam N S = N T. <sup>d</sup> ergo N S q.  
 N V q<sup>c</sup> (hoc est :: D E q. D F q) N T q. N V q<sup>f</sup> :: D H \* H E. B H \*  
 H A (hoc est :: D H \* H E. H L q<sup>g</sup> :: D E q. D F q. ergo sectio  
 D L E habet proprietatem ellipsis, cujus axes D E, D F. Q. E D.

Prop.

Coroll. QH (æqualis dimidiæ distantiae) est semiaxis minor.

## Prop. XIV.

Si conoides hyperbolicum secetur plano (DEL) coincidenti omnibus lateribus coni conoides complectentis, non ad rectos axi (VK) sectio erit ellipsis, ejus autem major diameter erit illa (DE) quæ intercipitur à conoide à facta sectione planorum & ejus quod secat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum secanti plano. Fig. 134.

Nam eadem facta præparatione, qualis in præcedenti, monstrabitur fore semper  $DH \times HE.HLq :: NTq.NVq.$  unde sectio erit ellipsis, & diameter ejus DE, major quidem alterâ, quia  $PV^b \text{ --- } VS^c$ , adeoque  $TN^d \text{ --- } NS^d \text{ --- } NV.$  a conv. 25. I Apol. b cor. 36. I Ap. c 26. & 14.5. d 19.1.

Coroll. Si fiat  $TN, NV :: ED.M.$  erit M altera diameter.

## Prop. XV.

Si oblongum sphæroides secetur plano (DEL) non recto ad axem (VX), sectio erit ellipsis. Diameter autem ipsius major erit illa (DE) quæ intercipitur in sphæroide à facta planorum sectione, ejusque quod secat figuram, & illius quod per axem ducitur secanti plano rectum. Fig. 135.

Quod sectio sit ellipsis, cujus diameter DE non fecus quàm in præcedentibus facillè apparèt. Quod verò DE sit major è diametris, hinc (admissis quæ prius) patet, Per centrum C ducantur ba axi VX perpendicularis, & de ad BA parallela. Et quoniam quadrata ex de, ba<sup>a</sup> se habent, ut NTq ad VNq, hoc est ut DEq ad quadratum alterius diametri, & sit de major quàm ba, erit DE major altera diametro. Q.E.D. a 16. 3. Apoll.

## Coroll. I.

Siquidem prolatum sphæroides plano secetur, alia quidem eadem erunt, sed intercepta in sphæroide linea (qualis DE) minor erit diameter.

## II.

Ex iisdem quoque patet in omnibus figuris, quod si parallelis planis secantur ipsarum sectiones similes erunt.

Nam quadrata è perpendicularibus LH ad comprehensa sub segmentis DH, HE rectangula semper easdem obtinebunt rationes, æquales

æquales scilicet ei, quam habent  $V N q$  ad  $N T q$ .

Coroll. III.

Si fiat  $T N. N V :: E D. M$ . erit  $M$  altera diameter.

Prop. XVI.

Fig. 136. In conoide parabolico à quibuscunque punctis  $(D)$  in superficie conoidis ductis ad axem  $(V K)$  parallelis  $(F D E)$ , quæ  $(B F)$  in easdem partes ducuntur, ad quas sunt ejus gibba, cadent extra conoides, quæ verò ad alteras  $(D E)$  intra.

a 12 hujus.  
b 16. I Apol.  
c hyp.

Nam si per  $E F$  & axem  $V K$  ducatur planum, <sup>a</sup> faciet parabolam, <sup>b</sup> extra quam  $D F$  tota cadet, &  $D E$  intra; quia est  $F E$  ad  $V K$  parallela.

Prop. XVII.

Fig. 137. In conoide hyperbolico, à quibuscunque punctis  $(D)$  in ejus superficie, ductis rectis  $(F D E)$  parallelis alicui rectæ  $(C G)$  quæ est in conoide, ducta per coni conoides complectentis verticem  $(C)$ , quæ  $(D F)$  ad easdem partes ducuntur, ad quas sunt ipsius gibba, cadent extra conoides, quæ  $(D E)$  ad alteras, intra.

a 12 hujus. B.  
b 47. I Apol

Nam si per  $C G$ , &  $D E$  ducatur planum <sup>a</sup> fiet hyperbola, cujus centrum  $C$ , bergo ducta  $C D H$ , &  $C G$  erunt diametri; quapropter  $D E$  his intercidens tota ad partes  $E$  intra, versùs  $F$  verò extra sectionem cadet.

Prop. XVIII.

Fig. 138. Si figuras conoides tangat planum  $(D T)$  non secans conoides, in uno tantum puncto tanget; & per tactum  $(D)$  & axem  $(V K)$  ductum planum  $(D V K)$  rectum erit tangenti plano  $(D T)$ .

a 8 def. II.  
b 12 hujus.  
c 10. I Apol.  
d 7. II.  
e 12 hujus.  
f prius.  
g 18. 3.

Si fieri potest, tangat planum  $D T$  etiam in  $Y$ , & per puncta  $D Y$  ducantur rectæ  $D E$ ,  $Y Z$  axi parallelæ; itaque ductum per has planum aut per axem transsit, aut <sup>a</sup> ei parallelum est; inque conoidis superficie sectionem <sup>b</sup> efficit coni, <sup>c</sup> quam recta  $D Y$  fecat; cum igitur  $D Y$  <sup>d</sup> sit in plano  $D T$ , hoc fecabit conoides, adversus hypothelin.

Porro ducatur  $D N$  axi perpendicularis; <sup>e</sup> hæc diameter erit circuli ad planum  $D V K$  recti, cujus cum tangenti plano communis sectio sit recta  $D T$ ; hæc igitur circulum tanget (<sup>f</sup> nec enim secat) <sup>g</sup> unde

de D T ad D N perpendicularis erit, & proinde <sup>h</sup>recta plano D V K. <sup>h</sup> 4 def. 11. ergo planum quodque per D T, adeoque planum tangens <sup>k</sup>rectum <sup>k</sup> 18. 11. erit plano D V K. Q. E. D.

*Coroll.* Quævis in plano tangenti recta conoidi occurrens tangit conoides; & quamlibet in conoidis superficie factam sectionem. Nam si recta conoides ipsum, aut in ejus superficie factam sectionem aliquam secaret, planum (contra hypothesin) secaret conoides.

*Prop. XI X.*

*Si sphæroidon figurarum quamlibet tangat planum, figuram non secans, in uno solum puncto tanget; quodque per tactum, & axem ducitur planum, tangenti plano rectum erit.*

Prorsus eodem modo demonstratur quo præcedens.

*Prop. X X.*

*Si (\*conoideon aut) sphæroideon figurarum qualibet secetur plano \*Ia puto scrip- per axem (V X) & sectionem contingens ducatur recta quadam (D T), fissa Archime- & per tangentem erigatur planum plano secanti rectum, continget figu- dem. ram in eodem puncto (D), in quo & recta (D T) con sectionem tangit. Fig. 139.*

Nam si fieri potest alibi tangat dictum per D T planum, puta in G; <sup>a</sup> 38. 11. & à G ducatur G E recta plano D V X; <sup>a</sup> cadet hæc in ipsam D T; <sup>b</sup> 38. 11. <sup>c</sup> unde punctum E erit intra con sectionem, contra hypothesin. <sup>c</sup> 12. huj. D.

*Prop. X X I.*

*Si figurarum sphæroidon aliquam duo plana parallela (R T, B S) Fig. 140. contingant, contactus jungens (B A) per sphæroidis centrum (C) transibit.*

Planum per B, & axem V X plano tangenti B S <sup>a</sup>rectum est; <sup>b</sup> 3. 2 19 huj. deoque plano A T. planum per A, & axem tangenti plano A T <sup>b</sup>re- <sup>b</sup> sch. 14. 11. ctum est; <sup>c</sup> ergo plana B V X, A V X aut parallela sunt, aut coinci- <sup>c</sup> 8. def. 11. dunt; <sup>d</sup> non illud, ergo hoc. Igitur communes plani B V A X cum <sup>d</sup> 16. 11. tangentibus planis sectiones B S, A T <sup>e</sup>parallelæ sunt; & <sup>e</sup> tangunt <sup>e</sup> hujus, ellipsim B V A X, <sup>f</sup> ergo recta B A per centrum transit. Q. E. D. <sup>f</sup> conv. 27. 2 Apol.

*Prop.*

## Prop. XXII.

Fig. 141.

Si figurarum sphæroidum quamcunque contingentia dicantur duo parallela plana (B S, A T) ducatur autem per sphæroidæleos centrum (C) planum aliquod (D E) tangentibus parallelum; quæ per effectam sectionem ducuntur tactus conjungenti (B A) parallela (U M) extra sphæroides cadent.

a 16. 11.  
b 21 hujus.  
c hyp.  
d 12. hujus. C.  
e cor. 18. huj.  
f conv. 27.  
2 Apol.  
g 47. 1 Apol.  
h 32. 1 Apol.

Sumatur in sectione punctum quodvis D, & per B A ac D ducatur planum, cujus cum parallelis planis communes sectiones sint rectæ S R, D E, T X. hæ igitur parallelae sunt, & D E per centrum transit, quia centrum est tam in <sup>b</sup>recta B A, quam in <sup>c</sup>plano per D E) & sectio B D A E est <sup>d</sup>ellipsis (aut fortè circulus) & B S, A T hanc sectionem <sup>e</sup>tangunt, adeoque B A, D E sunt <sup>f</sup>diametri <sup>g</sup>conjugatae. <sup>h</sup>ergo quæ per D ducitur ad B A parallela (D M) tangit sectionem B D A E adeoque sphæroides ipsum. Q.E.D.

## Prop. XXIII.

Fig. 142.

Omnis figura sphæroides (V D X E) secta plano (D E) per centrum (C) bipertitur à plano, cum ipsa, tum superficies ejus.

Operam ludat, opinor, qui rei tam claræ lucem conetur addere. Sanè si (ducto per axem V X plano ad planum D E recto) semi-ellipses D V E, D X E similes sint & æquales, quidni eodem modo portiones sphæroides D V E, D X E æquentur & assimilentur penitus? sibi congruent utique: plura tædet.

## Prop. XXIV.

Fig. 143.

<sup>a</sup>lego χαμαί pro  
πλάμα.  
<sup>b</sup>lego ἐξόντων  
συνκείμενων,  
pro ἐχόντων  
τῶν συνκείμι-  
νων.

Datâ cujuscunque conoidis portione (B V A) resectâ plano (B O A) recto ad axem (V K) (vel cujuslibet sphæroidis non majoris dimidio sphæroide portione similiter abscissâ) possibile est figuram solidam inscribere, & aliam circumscribere, è cylindris aequè altis <sup>a</sup>compositam, ita ut figura circumscripta superet inscriptam minori quàm propositâ quâcunque solidâ magnitudine (Z).

a 12 hujus.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto, <sup>a</sup>faciente coni sectionem B V A; & super circulum B O A constituatur cylindrus B P Q A, habens eundem cum conoide axem V K; qui quidem



dem, \*aquisecto axe in punctis N, M, L, <sup>b</sup> sic dividatur ut sit cylind. b 1. 10. & 11  
 drus B X X A, altitudine K L, minor dato solido Z. Per divisionum 12. \*  
 verò puncta L, M, N ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni  
 occurrentes punctis B, A; per quæ ducantur rectæ l λ, m μ, n ν ad  
 V K parallelæ. Jam circa axem V K circumvolutâ figurâ B x λ μ ν μ  
 λ x A liquet <sup>c</sup>effici figuram conoidi circumscriptam, constantem è cy- c 21. def. 11.  
 lindris B x, B λ, B μ, B ν æquè altis (nam rectæ x B, λ B, μ B & c  
<sup>d</sup> cadunt extra conoides; & rectæ B A sunt <sup>a</sup> diametri circulorum d 16, 17, 22 b.  
 parallelorum ipsi B O A; & altiutnes K L, L M & c æquantur). e conf.  
 Item circumductâ figurâ l m n B A n m l, patet inscriptam esse conoidi  
 figuram, itidem è cylindris æquè altis compositam; (nam rectæ l B,  
 m B, n B intra sectionem jacent & c) quia verò cylindrus B l <sup>f</sup> æqua-  
 tur cylindro B λ, & cylindrus B m cylindro B μ, & <sup>f</sup> cylindrus B n f 11. 12.  
 cylindro B ν; liquet circumscriptam excedere inscriptam cylindro  
 B x, hoc est minore quàm solido Z. Q. E. F.

Coroll. Cylindrus B x est excessus figuræ circumscriptæ supra  
 inscriptam.

## Prop. XXV.

Data conoidis cujuscunque portione (B O A) resectâ plano (B O A) Fig. 143.  
 non rectâ ad axem (vel sphaeroidis cujuslibet non majoris dimidio spha-  
 roide similiter resectâ potest i si figura so ida inscribi, aliâque circum-  
 scribi, ita ut figura circumscripta inscriptam excedat minori, quàm  
 propositâ quacunque magnitudine solidâ (Z).

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto: <sup>a</sup> ita ut a 12. hujus.  
 fiat coni sectio B V A, cujus communis cum plano B O A sectio B R b 13, 14, 15 h.  
 erit diameter ellipsis B O A. sectionem vero B V A <sup>c</sup> tangat recta c sch 53. 2 Ap.  
 R Q ad B A parallela in V; à quo <sup>d</sup> ducatur sectionis diameter V K. d 10. 1.  
 Super ellipse verò B O A <sup>e</sup> constituatur segmentum cylindricum e 10. hujus.  
 B P Q A, habens axem K V: æquisecetur autem V K in punctis f 1. 10.  
 L, M, N, ita ut ducto per L plano ad B O A parallelo, <sup>f</sup> sit segmentum  
 cylindricum B x x A minus dato solido Z. Per dicta porro divisi-  
 onum puncta ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurren-  
 tes punctis B, A; unde ductis per B A planis ad ipsum B O A paral-  
 lelis (hoc est rectis plano B V A) <sup>b</sup> fient ellipses, quarum diametri B A;  
 ad quas utrinque <sup>c</sup> constituentur cylindrica segmenta B l, B λ; B m,  
 B μ & c. quorum axes K L, L M, M N & c æquales inter se. Fa-  
 ctum constat, ut in præcedente; quid plura?

His prælibatis, \*demonstremus quæ de figuris proposita sunt.

\*(Subjicit Ar-  
 chimedes)

Hactenus nempe propositiones lemmaticas præstravit, jam principales aggreditur, quibus istæ deserviunt.

## Prop. XXVI.

Fig. 143.

Quæcumque portio (B V A) conoidis parabolici reflecti plano (B O A) recto ad axem (V K) sesquialtera est coni (B V A) basin habentis eandem portioni, & axem.

Si fieri potest, sit primò port B V A  $\sqsubset \frac{1}{2}$  con B V A. Portioni circumscribatur figura (quæ vocetur  $\phi$ ) & inscribatur altera (quæ dicatur  $\downarrow$ ) utraque constans cylindrulis, juxta 24 hujus, ita ut  $\phi \sqsubset \downarrow \sqsupset$  port A B C  $\sqsubset \frac{1}{2}$  con A B C; unde cum  $\phi$  sit  $\phi \sqsubset$  port A B C, erit  $\downarrow \sqsubset \frac{1}{2}$  con A B C  $\equiv$  cyl  $\frac{B P Q A}{2}$ . Sunt autem figuræ circumscrip-

præ cylindri (æquæ scilicet alti) B  $\kappa$ , B  $\lambda$ , B  $\mu$ , B  $\nu$  ad se ordine  $\downarrow$  ut suæ bases, hoc est ut quadrata radiorum B K, B L, B M, B N, hoc est ut axes V K, V L, V M, V N, hoc est juxta hypothésin primæ hujus. ergo cum cylindrus B P Q A æquetur totidem æqualibus horum maximo B  $\kappa$ ; & figura  $\downarrow$  ipsi his omnibus, dempto maximo B  $\kappa$ ; erit cyl  $\frac{B P Q A}{2} \sqsubset \downarrow$ . sed prius erat  $\downarrow \sqsubset$  cyl  $\frac{B P Q A}{2}$ : quæ repugnant.

Sin verò dicatur esse  $\frac{1}{2}$  con B V A  $\sqsubset$  port B V A; sit jam  $\phi \sqsubset \downarrow \sqsupset \frac{1}{2}$  con B V A  $\sqsubset$  port B V A; adeoque cum sit port B V A  $\sqsubset \downarrow$ , \* erit  $\phi \sqsubset \frac{1}{2}$  con B V A, hoc est  $\phi \sqsubset$  cyl  $\frac{B M N A}{2}$ , quod est absurdum.

Ergo potius est portio B V A  $= \frac{1}{2}$  con B V A. Q. E. D.

o 11. & 2. 12. Archimedes adhibet secundam hujus, hoc fermè pacto. Quoniam p 20. I Apol. est cyl B | B  $\kappa$ , L A :: (B K q. B L q p ::) V K. V L. & cyl X S. m A q 11. 12. | X S  
r 7. 5. :: (B K q. B M q p ::) V K. V M. & simili modo cyl X S. n A :: V K.  
s 2 hujus. V N; & sunt cylindri X S æquales inter se, adeoque proportionales totidem æqualibus ipsi V K, ergo erit illorum  
t 1 hujus. summa (hoc est cylindrus B  $\phi$  Q A) ad omnes l A, m A, n A, ut totidem V X ad V L  $\vdash$  V M  $\vdash$  V N; hoc est in majori ratione quàm 2 ad 1 &c. Res eodem recidit, at noster modus simplicior videtur, & clarior; qualem proinde nos in sequentibus haud verebimur usurpare.

Cylindri. Rest.  
XS.XS.XS.XS. VK.VK.VK.VK.  
l A, m A, n A. VL.VM.VN.

Cor.

*Cor.* Conoidis parabolici portio dimidia est cylindri ad æqualem basin & æquæ alti.

*Cor. 2.* Hinc datâ parabolici conoidis portione rectò abscissâ, Fig. 144. facile reperitur æqualis ei conus, aut cylindrus,

Si protrahatur axis KV ad D, ut sit  $DV = \frac{1}{2} KV$ . erit conus BDA =  $\frac{1}{2}$  con BVA = port BVA.

*Schol.*

Indivisibilium methodo facilè deducitur hæc propositio. Sit enim VN = a, UK = A; parameter r, vel R. estque

$$\left. \begin{array}{l} BNq = ra \\ BMq = 2ra \\ BLq = 3ra \\ BKq = RA \end{array} \right\} \propto \text{Summa est } \frac{RAA}{2} \text{ ergo summa circularum BA est } \propto \text{sch. i huj.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \propto \frac{RAA}{2} \\ \propto \frac{RAA}{3} \end{array} \right\} \text{*Conus BVA est } \propto \frac{RAA}{3} \text{ ergo. } \frac{BKq}{3} \propto VK.$$

3

*Prop. XXVII.*

Quinetiam si plano (BOA) non rectò ad axem à conoide parabolico Fig. 145. resecetur portio (BVA) similiter sesquialtera est segmenti conici (BVA) basin habentis eandem cum portione, & axem eundem.

Si fieri potest, sit port BOA  $\propto \frac{1}{2}$  segm BVA, portioni circum-

scribantur & inscribantur figuræ (quæ dicuntur  $\phi \downarrow$ ) constantes seg-

menti cylindricis, juxta 25 hujus, ita scilicet ut  $\phi \downarrow \propto$  port

BVA  $\propto$  segm BVA. unde erit  $\downarrow \propto \frac{1}{2}$  seg BVA. Sunt autem a sch. 11 huj.

segmenta cylindrica B $\alpha$ , B $\lambda$ , B $\mu$ , B $\nu$ , <sup>a</sup> ut bases suæ ellipticæ, b cor. 7. huj.

<sup>b</sup> hoc est ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, <sup>c</sup> hoc est ut axes BK, c 20. 1 Apol.

BL, BM, BN, <sup>d</sup> hoc est rursus juxta hypothesin primæ hujus; d constr.

<sup>e</sup> quare segm  $\frac{BPQA}{2} \propto \downarrow$ , <sup>f</sup> hoc est  $\frac{1}{2}$  segmenti conici BVA  $\propto \downarrow$ ; e 1 hujus.

quod ostensis repugnat: Sin dicatur port BVA  $\propto \frac{1}{2}$  segm BVA, itidem consequetur absurda contradictio, sicut in præcedenti. Ergo potius est port BVA sesquialtera segmenti conici BVA. Q. E. D.

Hinc quoque facilè reperiatur segmentum conicum aut cylindricum (vel etiam conus, & cylindrus) æquale ejusmodi portioni.

## Prop. XXVIII.

Fig. 145.

*Si conoidis parabolici duæ portiones (BVA, SDG) refecentur planis, altera quidem (BVA) recto ad axem, altera verò (SDG) obliquo, sint verò portionum axes (VK, DE) æquales; portiones erunt æquales.*

a 12 hujus. A.  
b hyp.  
c cor 4. hujus.  
d 7. 5.  
e 4. 6.  
f 1. 6.  
g 13 hujus.  
h 6 hujus.  
k 11. 5.  
l sch. 11 huj.  
m 26 & 27 h.  
& 15. 5.

Secetur conis plano per axem ad planum SG recto, <sup>a</sup> faciente sectiones BVA, SDG; quarum diametri VK, DE; connectantur autem VB, VA & DS, DE; & ducantur GL ad DE (protractum) & DP ad SG perpendicularis. & propter DE <sup>b</sup> = VK, <sup>c</sup> est GL = AK. <sup>d</sup> unde GE. GL) (<sup>e</sup> hoc est DE, DP, <sup>d</sup> vel VK, DP) :: GE. AK :: GE \* AK. AKq. <sup>e</sup> Sunt verò GE, & GL, vel AK semiaxes ellipsis, quæ basis est portiones SDG; <sup>h</sup> adeoque GE \* AK ad AKq, ut hæc ellipsis ad circulum radio AK. ergo ut altitudo VK ad altitudinem DP, <sup>k</sup> ita est reciprocè basis segmenti conici SDG ad conum BVA. <sup>l</sup> ergo conus BV A segmento conico SDG æquatur, <sup>m</sup> & ideo portio BV A portioni SDG. Q.E.D.

## Prop. XXIX.

Fig. 146.

*Si conoidis Parabolici duæ portiones refecentur planis, quomocunque ductis, portiones ad se mutuò rationem habebunt eandem, quam quadrata axium suorum.*

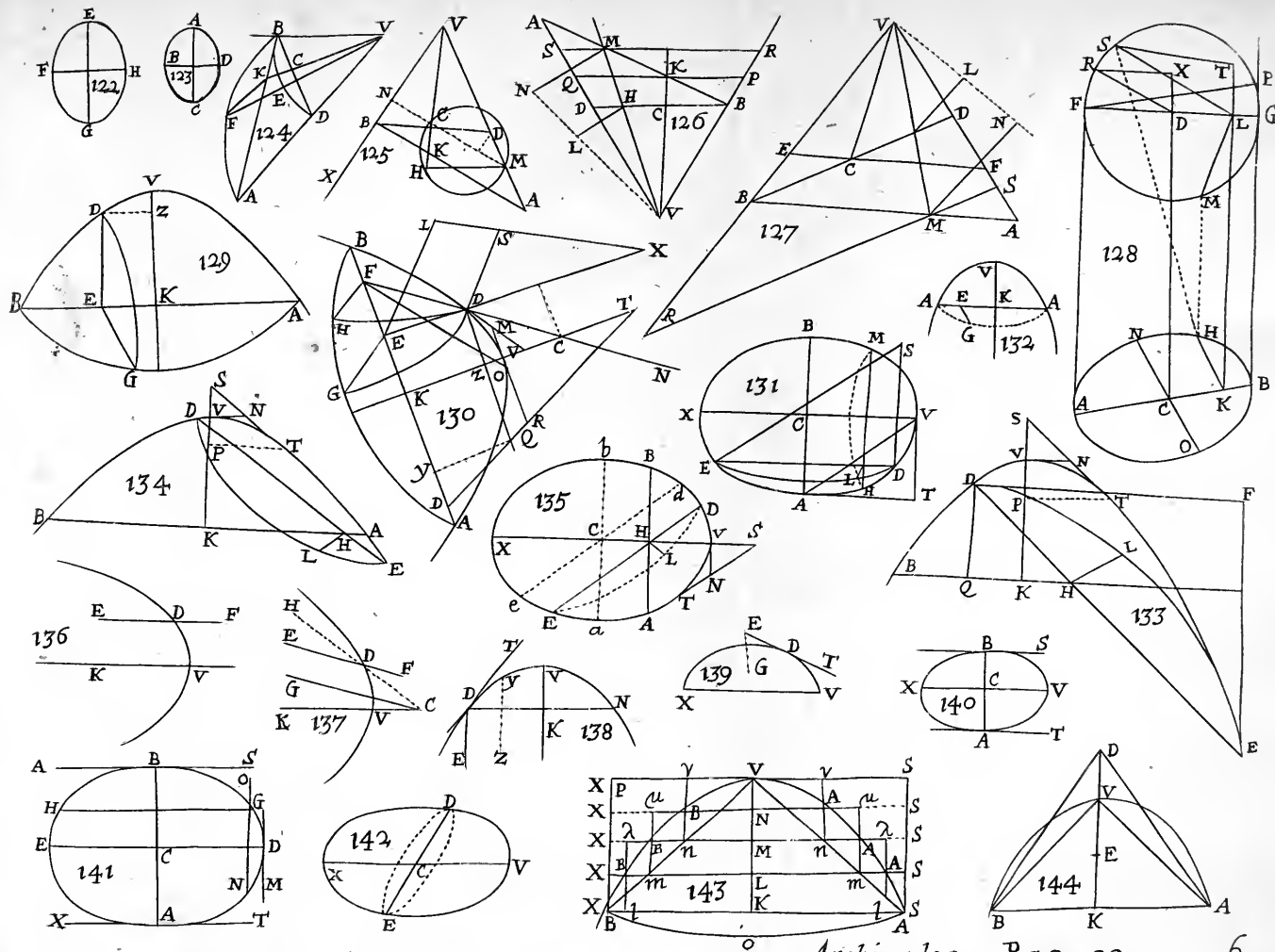
a 28 hujus.  
b 15. 5. & 26  
27 hujus.  
c schol 15. 12.  
d 2. 12.  
e 21. 1 Apol.  
f 23. 6.  
g conf. & 7. 5.

Per axem conoidis ducatur planum, quod efficiat sectionem; in cuius axe sumantur à vertice rectæ VK, VZ datarum portionum axibus æquales, & ducantur BA, XY ad VK perpendiculares; <sup>a</sup> sunt igitur portiones BVA, XVY æquales datis; hæc verò se habent invicem <sup>b</sup> ut conii BVA, XVY, <sup>c</sup> hoc est in composita ratione basisum & altitudinum, hoc est in ratione composita ex rationibus <sup>d</sup> BKq ad XZq, & VK ad VZ; <sup>e</sup> hoc est composita ex rationibus VK ad VZ, & VK ad VZ; hoc est, <sup>f</sup> ut VKq ad VZq, <sup>g</sup> hoc est ut quadrata axium datarum portionum. Q.E.D.

## Prop. XXX.

Fig. 147.

*Omnis hyperbolici conoidis portio (BYA) resecta plano (BOA) recto ad axem, ad conum (BVA) habentem basim eandem cum portione, & æqualem altitudinem, hanc habet rationem, quam habet æqualis (KY) & axi (VK) portiones, & tripla (VY) axi accedentis (VC)*





(V C) ad aequalem (X T) utrique & axi portionis, & duplæ (V T) accedentis axi.

Sit aliquod Z. con B V A :: K Y. K T ; & si fieri potest sit pri- a 24 hujus.  
mò Z  $\supset$  port B V A. <sup>a</sup>Portioni circumscribantur & inscribantur  
figuræ (quæ dicantur  $\phi$ , &  $\psi$ ) utraque constans cylindris, juxta 24  
hujus, ita ut sit  $\phi - \psi \supset$  port B V A - Z ; <sup>a</sup>adeoque Z  $\supset \psi$  ; sunt  
autem cylindri B  $\lambda$ , B  $\mu$ , B  $\nu$  ad se, <sup>b</sup>ut bases, <sup>c</sup>hoc est ut B Kq, b 11. 12.  
B Lq, B Mq, B Nq, <sup>d</sup> hoc est ut rectangula T K V, T L V, T M V, c 2. 12.  
T N V, (<sup>e</sup>hoc est ut T V  $\perp$  V K  $\times$  V K ; T V  $\perp$  V L  $\times$  V L, T V d 21. 1 Apol.  
 $\perp$  V M  $\times$  V M, T V  $\perp$  V N  $\times$  V N) <sup>f</sup> hoc est juxta hypothesein ter- e 1. 6.  
tiæ hujus ; ergo <sup>g</sup>cylindrus B Q (æqualis summæ maximorum B  $\lambda$ ) f const.  
ad figuram inscriptam  $\psi$  (æqualem summæ inæqualium cylindrorum g 2 hujus.  
dempto maximo) se habet, ut rectangula totidem æqualia maximo h 3 hujus.  
T K V ad inæqualia rectangula T L V, T M V, T N V, <sup>h</sup> hoc est in k 15. 5.  
majore ratione quàm K T ad  $\frac{1}{3}$  K V  $\perp$   $\frac{1}{2}$  V T, hoc est in majore ra- l const.  
tione quàm cylindrus B Q ad Z (nam est  $\frac{K T}{3} \cdot \frac{K V}{3} \perp$  V C <sup>k</sup> :: (K T. m const. & cor.  
K V  $\perp$  3 V C <sup>l</sup> :: K T. K Y <sup>m</sup> :: con B V A. Z <sup>n</sup> ::) cyl  $\frac{B Q}{3}$  Z ; <sup>o</sup> a- 4. 5.  
deoque K T.  $\frac{K V}{3} \cdot \perp$  V C :: cyl B Q. Z) <sup>p</sup> ergo  $\psi \supset$  Z ; quod re- n 10. 12.  
pugnat prius ostensis. Sin dicatur Z  $\supset$  port B V A ; <sup>q</sup> fiat  $\phi - \psi$  \* o  
 $\supset$  Z - port B V A, <sup>a</sup>adeoque  $\phi \supset$  Z ; & quia cyl B Q.  $\phi \supset$  K T. p 10. 5.  
 $\frac{1}{3}$  K V  $\perp$   $\frac{1}{2}$  V T <sup>s</sup> :: cyl B Q. Z ; <sup>t</sup> erit  $\phi \supset$  Z quod itidem repug- q 24 hujus.  
nat. ergo potius est Z = port B V A. Q.E.D. r 3 hujus.  
s prius.

Schol.

Hinc faciliè reperitur conus æqualis datæ hyperbolici conoidis portioni (B V A).

Fiat K V  $\perp$  2 V C. K V  $\perp$  3 V C :: K V. K D. Estque con B D A. Fig. 148<sup>n</sup>  
con B V A :: K D. K V :: K V  $\perp$  3 V C. K V  $\perp$  2 V C :: port  
B V A, con B V A. unde con B D A = port B V A.

Schol.

Indivisibilium methodo faciliùs transigitur hoc negotium.

Sint

Sint  $VN = a. VK = A.$  est

$$BNq^{\alpha} = ra - \frac{r}{t} aa$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra - \frac{r}{t} \frac{1}{2} aa$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra - \frac{r}{t} \frac{1}{3} aa$$

$$BKq^{\alpha} = RA - \frac{R}{T} Aq.$$

6 schol. 1 buj.  
7 sch. 10. de he-  
lic.

$$\text{Summa } \frac{6 RAA}{2} - \frac{7 R AAA}{T \frac{1}{3}}$$

\*hoc est  $\frac{\sigma}{\delta}$  Ergo summa circularum BA, est  $\frac{\sigma}{\delta} \times \frac{RAA}{2} - \frac{R A^3}{T \frac{1}{3}}$ . At conus

\* BKq<sup>α</sup> VK.  
δ 10. 12.  
ζ 15. 5.

BVA est  $\frac{\sigma}{\delta} \times \frac{RAA}{3} - \frac{R AAA}{T \frac{1}{3}}$ . Horum verò eadem est ratio quæ

$\frac{3T}{2} - A$  ad  $T - A$  (quod patet istas summas multiplicando per  $3T$

& dividendo per RAA). Et hoc, opinor, modo Archimedes hanc proportionem adinvenit.

## Prop. XXXI.

Quinimò si non recto ad axem plano refecetur portio hyperbolici conoidis, ad segmentum conì, basin habentis eandem cum portione, eundemque axem, hanc habebit rationem, quam aequalis utrique, axi nempe portione cum tripla accedentis axi, ad aequalem ambabus, axi nempe & dupla accedentis axi.

Probatur ut antecedens, nisi quòd pro circulis hinc ellipses habeantur. Confer Propos. 27.

## Prop. XXXII.

Fig. 149.

Omnia figura spheroides plano refecta per centrum (K) recto ad axem (VT) dimidium (BVA) duplum est conì BVA basin habentis eandem cum portione, & eundem axem.

a 24 bujus.

b ut in priorib.

Si fieri potest sit 2 con BVA  $\supset$  port BVA; portioni <sup>a</sup>circumferantur & inscribantur figuræ (quas pro more voco φ & ψ) ita ut sit φ  $\supset$   $\supset$  port BVA  $\supset$  2 con BVA; <sup>b</sup>ac ideo 2 con BVA  $\supset$  ψ.

Sunt



Sunt autem cylindri  $B\kappa$ ,  $B\lambda$ ,  $B\mu$ ,  $B\nu$  ad se <sup>c</sup>ut  $BKq$ ,  $BLq$ ,  $BMq$ ,  $BNq$ , <sup>a</sup> hoc est ut rectangula  $TKV$ ,  $TLV$ ,  $TMV$ ,  $TNV$ , <sup>h</sup> hoc est ut  $VKq$ ,  $VKq-KLq$ ,  $VKq-KNq$ ,  $VKq-KNq$ ; ergo cylindrus  $BQ^b$  (æqualis summæ cylindricorum æqualium maximo  $B\kappa$ ) ad figuram  $\downarrow^b$  (æqualem summæ inæqualium dempto maximo) <sup>c</sup>se habet ut totidem  $VKq$ , ad reliqua  $VKq-VLq$ ,  $VKq-VMq$ ,  $VKq-VNq$ . <sup>h</sup> hoc est in majori ratione quam tot  $VKq$  ad  $VKq$ ,  $VKq-VLq$ ,  $VKq-VMq$ ,  $VKq-VNq$ , <sup>h</sup> hoc est in majori ratione quam tot  $VKq$  ad tot  $VKq$  —  $\frac{1}{3}VKq$  (quia  $\frac{\text{tot } VKq}{3}$   $\square$   $VLq + VMq + VNq$ ) hoc est quam tot  $VKq$  ad tot  $\frac{2}{3}VKq$ , hoc est quam 3 ad 2, <sup>h</sup> hoc est quam cylindrus  $BQ$  ad duplum coni  $BVA$ . unde fig  $\downarrow \supset 2$  con  $BVA$ . verum erat 2 con  $BVA \supset \downarrow$ , quæ repugnant.

Quod si dicatur 2 con  $BVA \square$  por  $BVA$ ; <sup>m</sup> fiat  $\phi \supset \downarrow \supset 2$  con  $BVA$  — port  $BVA$ ; adeoque  $\phi \supset 2$  con  $BVA$ . verum contra, priorem discursum invertendo, <sup>n</sup> patet esse 2 con  $BVA$  ad cylindrum  $BQ$  in minori ratione quam  $VKq$ ,  $VKq-VLq$ ,  $VKq-VMq$ ,  $VKq-VNq$  ad tot  $VKq$ , <sup>o</sup> hoc est quam figura  $\phi$  ad cylindrum  $BQ$ , <sup>p</sup> adeoque esse 2 con  $BVA \supset \phi$ , quod repugnat. Quin potius ergo est port  $BVA = 2$  con  $BVA$ . *Q.E.D.*

Per indivisibilia: sit  $VN = a$ ,  $VK = A$ .

$$BNq^a = ra - \frac{r}{t}aa.$$

$a$  13. 1 Apol.

$$BMq^a = 2ra - \frac{r}{t}4aa.$$

$$BLq^a = 3ra - \frac{r}{t}9aa.$$

$$BKq^a = RA - \frac{R}{T}AA.$$

<sup>e</sup> Summa est  $\frac{RAA}{2} \frac{2R}{T} \frac{AAA}{3}$ . & summa circularum  $BA$  est  $\frac{\pi}{\delta}$ : <sup>g</sup> 1 hujus. <sup>h</sup> 2 sch. 10. <sup>i</sup> helic. <sup>j</sup> 10. 11.

$\frac{RAA}{2} - \frac{R}{T} \frac{A^3}{3}$ . At verò conus  $BVA$  est  $\frac{\pi}{\delta}$ :  $\frac{RAA}{3} - \frac{R}{T} \frac{A^3}{3}$  (quia  $\zeta$  13. 1 Apol. <sup>l</sup> 15. 5.

$BKq \zeta = RA + \frac{R}{T}AA$ ). ergo cum ista summa <sup>g</sup> sit ad hanc ut  $\frac{3}{2} \frac{F}{R}$  —

A ad  $T - A$  (ut patet utramque ducendo in  $T$ , & dividendo per  $RAA$ )

A hyp.  
μ 11.5.

RAA) hoc est in præfente casu ut 2 ad 1 )  $\wedge$  quia  $\frac{T}{2} = A$ )  $\mu$  erit portio B V A ad conum B V A, ut 2 ad 1.

Prop. XXXIII.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem per centrum secetur, similiter dimidium sphæroidis duplum erit segmenti coni basin habentis eandem cum portione, eundemque axem.

Non abludit demonstratio ab illa præcedentis: confer propof. 27 & 31.

Prop. XXXIV.

Fig. 149.

Omnis figura sphæroidis (B V A T) plano secta recto ad axem (V T) non per centrum (C) portio minor ad conum (B V A) basin habenti eandem cum portione, & axem eundem (V K) hanc habet rationem, quam utraque (V C — K T) & semissis axis sphæroidis, & axis majoris portionis ad axem (T K) majoris portionis.

Vides in præcedente secundum indivisibilia processu, qui generalis est, & ad qualibet portiones (etiam hemisphæroide majores) æquè spectat, esse portionem B V A ad conum B V A, ut  $\frac{3T}{2} - A$  ad T-A,

hoc est ut V C — K T ad K T. Q.E.D.

Sin Archimedis strictiorem discursum aves cognoscere; sit aliquod Z. con B V A :: V C — K T. K T. & si fieri potest, sit primò port B V A — Z. Portioni verò B V A rursum circumscribantur figuræ  $\Psi$ , ita ut  $\Psi - \Psi \supset$  port B V A — Z; ac b inde  $Z \supset \downarrow$ . Sunt verò cylindri B $\alpha$ , B $\lambda$ , B $\mu$ , B $\nu$  ad te<sup>c</sup>ut rectangula B K V, B L V, B M V, B N V; adeoque cylindrus B Q ad inscriptam figuram  $\Psi$ , <sup>f</sup>ut tot rectangula T K V ad rectangula T L V, T M V, T N V.

$$\text{Est verò } \begin{cases} \text{TK} \times \text{KV}^* = \text{TL} \times \text{LV} + 2 \text{CK} \times \text{KL} + \text{KLq.} \\ \text{TK} \times \text{KV}^* = \text{TM} \times \text{MV} + 2 \text{CK} \times \text{KM} + \text{KMq.} \\ \text{TK} \times \text{KV}^* = \text{TN} \times \text{NV} + 2 \text{CK} \times \text{KN} + \text{KNq.} \\ \text{TK} \times \text{KV}^* = \text{TK} \times \text{KV} = 2 \text{CK} \times \text{KV} + \text{KVq.} \end{cases}$$

\*Nam excessus rectangulorum T K V, T L V est C L q — C K q<sup>b</sup> = C K q — 2 C K × K L + K L q — C K q = 2 C K — K L — K L q &c.

g 5. 2.  
h 4. 2.

de

Se verò habet summa juxta 3<sup>am</sup> hujus;  $\left. \begin{array}{l} 2CK \times KL \dashv KLq. \\ 2CK \times KM \dashv KMq. \\ 2CK \times KN \dashv KNq. \\ 2CK \times KV \dashv KVq. \end{array} \right\} k_3 \text{ hujus.}$   
 $\frac{1}{3} Kadeoq;$  tot æqualia maximo  $2CK \times KV$   
 $\dashv KVq$  ad omnia inæqualia se habent  
 in minori ratione, quàm  $2CK \dashv KV$  ad  
 $CK \dashv \frac{1}{3} KV$ ; hoc est quàm  $KT$  ad  $CK \dashv \frac{1}{3} KV$ . Ergo per con-  
 versionem rationis tot æqualia maximo sunt ad seipsa demptis his in-  
 æqualibus (hoc est omnia rectangula  $TKV$  ad ipsa  $TLV$ ,  $TMV$ ,  
 $TNV$ ) in majori ratione, quàm  $KT$  ad  $KT$  dempto  $CK \dashv$   
 $\frac{KV}{3}$ ; hoc est quàm  $KT$  ad  $CV - \frac{KV}{3}$ . Ergo cyl  $BQ \sqsubset KT, CV -$  m 10. 5.  
 $\frac{KV}{3}$ . Est verò cyl  $BQ, Z^n$ : 3 con  $BVA, Z^o$ : 3  $KT, VC \dashv KT$  n 10. 12.  
 3  $hypo.$

$\therefore KT, VC \dashv \frac{KV}{3}$  (nam  $VC \dashv KT = 3VC - VK$ ). Ergo  $\Phi$

$\sqsupset Z$ , contrà quàm priùs evictum est.

Quòd si dicatur esse  $Z \sqsubset$  port  $BVA$ , fiat  $\Phi \sqsupset Z$  — port  $p$  24 hujus.  
 $BVA$ , ac ideo  $\Phi \sqsupset Z$ . Jam (ostensis insistendo) est cyl  $BQ$  ad fi-  
 guram circumscriptam  $\Phi$ , quòt tot rectangula  $TKV$  (quòt sunt cylin- q ut in prac.  
 dri  $B$  in  $BQ$ ) ad rectangula  $TKV, TLV, TMV, TNV$ . verùm  
 tot rectangula  $TKV$  (hoc est tot  $2CK \times KV \dashv KVq$ ) ad summam  
 $\left. \begin{array}{l} 2CK \times KL \dashv KLq \\ 2CK \times KM \dashv KMq \\ 2CK \times KN \dashv KNq \end{array} \right\} \dashv KV$  (vel  $KT$ ) ad  $CK \dashv \frac{1}{3} KV$ . &  
 ideo dicta rectangula  $TKV$  ad seipsa demptâ  
 hac summâ (hoc est ad rectangula  $TKV, TLV, TMV, TNV$ )  
 in minori ratione erunt quàm  $KT$  ad  $CV - \frac{KV}{3}$ , hoc est quàm cyl  
 $BQ$  ad  $Z$ . quare cyl  $BQ, \Phi \sqsupset$  cyl  $BQ, Z$ . quare  $\Phi \sqsubset Z$ . quod u 10. 5.  
 iterum repugnat. ergo potius est  $Z =$  port  $BVA$ . Q.E.D.

Prop. XXXV.

Quinetiam si spheroides plano non recto ad axem secetur, neque per  
 centrum, minor ejus portio ad segmentum conì basin habentis eandem  
 cum portione axemque eundem hanc rationem habebit, quam simul ul-  
 traque & dimidia ejus, quæ connectit vertices factarum portionum, &  
 axis majoris portionis ad axem majoris portionis.

Rursus est port  $BVA$  ad conum  $BVA$ , ut  $VC \dashv KT$  ad  $KT$ .  
 Simili modo demonstratur, ut præcedens, adhibendo ellipses pro cir-  
 culis, ut in 27 hujus; quare rædio parcimus.

## Prop. XXXVI.

Fig. 151.

Cujuscunque figura sphaeroideos (B V A T) plano secta recto ad axem major portio (B T A) ad conum (B T A) habentem eandem cum portione basin, & eundem axem (T K), hanc habet rationem, quam equalis (G K) ambabus simul & dimidio (C V) axis sphaeroidis, & minoris portionis axi (K V) habet ad axem (K V) minoris portionis.

a scb 12.

b 21. I A. ol.

c conf.

d 1. 6.

e 20. def. 5.

f 34 huj.

g 32 huj.

h conf. &amp; 1. 6.

k 7. 5.

l 1. 2.

m 11. 12.

n conf.

o 19. 5.

p 12. 5.

q 17. 6.

r cor. 5. 2.

s 7. 5.

t prius.

Agatur planum D E per centrum ; & compleantur coni B V A, D V E: Sint verò T F = T C ; & V K . V C :: V C . V X. Estque jam con D V E con B V A.<sup>a</sup> = (V C . V K + D C q . B K q = V C . V K +<sup>b</sup> V C q . T K \* K V<sup>c</sup> = V X . V C + V C q . T K \* K V<sup>d</sup> = V X \* V C . V C q + V C q . T K \* K V<sup>e</sup> = ) V X \* V C . T K \* K V. item con B V A. port B V A<sup>f</sup> :: T K . K F<sup>g</sup> :: T K \* K V . K F \* K V. ergò ex æquo est con D V E. port B V A :: V X \* V C . K F \* K V. & antecedentes quadruplando <sup>h</sup>sphaeroidis D V E. port B V A ::<sup>h</sup> V X \* G F . K F \* K V. & dividendo port B T A. port B V A :: V X \* G F — K F \* K V. K F \* K V (hoc<sup>k</sup> est) :: V X \* G K + K X \* K F . K F \* K V. (nam est V X \* G F<sup>l</sup> = V X \* G K + V X \* K F = V X \* G K +<sup>l</sup> K V \* K F + K X \* K F; adeoque V X \* G F — K F \* K V = V X \* G K + K X \* K F). Item est port B V A. con B V A<sup>f</sup> :: F K . T K. 1. :: K F \* K V . T K \* K V; & con B V A. con B T A<sup>m</sup> :: K V . T K :: T K \* K V . T K q. ergo rursus ex æquo est port B T A. con B T A :: V X \* G K + K X \* K F . T K q. Quoniam verò est V X . V C<sup>n</sup> :: V C . V K ::<sup>o</sup> V X — V C . V C — V K (hoc est) :: C X . K C. & componendo V C + V K . V K :: K X . K C; hoc est G K . V K (1 vel V X \* G K . V X \* V K) :: K X . K C (1 vel K X \* K F . K C \* K F). & <sup>p</sup>proinde G K . V K :: V X \* G K + K X \* K F . V X \* V K + K C \* K F. est vero demum V X \* V K + K C \* K F<sup>q</sup> = V C q + K C \* K F = V C q +: T K — V C :: T K + V C<sup>r</sup> = V C q +: T K q — V C q = T K q. <sup>s</sup>ergo G K . V K :: (V X \* G K + K X \* K F . T K q<sup>t</sup> ::) port B T A. con B V A. Q. E. D.

Hujusce discursus tedium qui voluerit declinare, per generalem propof. 34æ discursum sibi patiatursatisfieri.

Prop.

## Prop. XXVII.

Quinetiam si sphæroides (BVAT) secetur plano non recto ad axem, neque per centrum, major ejus portio (BTA) ad segmentum coni basin habentis eandem cum portione, & eundem axem, hanc habebit rationem, quam utraque simul (KG) aqualis nempe dimidiæ (CV) vertices connectentis factarum portionum, & axi (KV) minoris portionis, ad axem minoris portionis.

Eodem ferè modo demonstratur quo antecedens, pauculis, quæ res ipsa sponte suggeret, immutatis.

## Coroll.

Ex his facillè reperiatur conus cuilibet datæ sphæroidis portioni (BVA) æqualis. Fig. 152.

Fiat nempe  $KT.VC \div KT :: KV.KD.$  & compleantur coni BVA. BDA; estque con BVA. con BDA<sup>a</sup> :: KV.KD<sup>b</sup> :: KT.VC<sup>c</sup>  $\div KT$  :: con BVA. port BVA. <sup>d</sup>ergo con BDA = port BVA. *Q. E. F.*

His subjiciemus ea, quæ è dictis consecrari subinnuit Archimedes in præloquio ad hunc librum suo.

## Prop. XXXVIII.

Similes sphæroideon & conoideon portiones (BVA, DXF) triplicatam inter se rationem habent axium suorum (VK, XL). Fig. 153. Fig. 154.

Sint C, E centra figurarum, & T, S axium extrema; & <sup>a</sup> quia est KB. KV :: LD. LX; <sup>b</sup> liquet conos BVA, DXF esse similes, adeoque triplicatam habere rationem diametrorum, vel axium VK, XL, (unde statim patet portiones BVA, DXF, si parabolicæ fuerint, habere quoque triplicatam eorundem axium rationem, in reliquis autem) ob figurarum similitudinem ipsarum latera proportionalia sunt, hoc est TK \* KV. KBq :: SL \* LX. LDq. ergo ex æquo est TK \* KV. KVq :: SL \* LX. LXq. <sup>c</sup> hoc est TK. VK :: SL. LX. & per conversionem rationis TK. TV :: SL. SX. adeoque TK. CV \* :: SL. EX. & componendo TK. TK  $\div$  CV :: SL. SL  $\div$  EX hoc est con BVA. port BVA :: con DXF. port DXF. ergo permutando con BVA. con DXF :: port BVA. port

111. 5.

B X F. 'ergo portiones B V A, D X F triplicatam quoque rationem habent axium V K, S L. *Q.E.D.*

*Coroll.* Hinc similes integræ figuræ sphæroides triplicatam axium rationem habent.

Nam ex hoc generali discursu ipsarum dimidiæ portiones ita se habent.

*Prop. XXXIX.*

Fig. 155.

Fig. 156.

*In spheroidibus figuris æqualibus (B V A T, D X F S) quadrata è diametris (B A, D F) proportionē reciprocantur axibus; & si quadrata diametrorum reciprocantur axibus, æqualia sunt spheroides.*

a 32. hujus.

b 15. 12.

c 15. 5.

Si sphæroides æquales ponantur, erunt ipsarum <sup>a</sup>subquadrupli coni B V A, D X F æquales; <sup>b</sup>adeoque erit B A q. D F q. :: E X. C V c. :: S X. T V. *Q.E.D.*

Sin ponatur esse S T. T V (<sup>c</sup>hoc est E X. C V) :: B A q. D F q. <sup>b</sup>erunt ideo coni B V A, D X F pares; ac adeo horum <sup>a</sup>quadruplæ sphæroides æquabuntur. *Q.E.D.*

*Prop. XL.*

Fig. 157.

Fig. 158.

*A data spheroidis aut conoidis portione (B V A) portionem abscondere plano ad datum planum parallelo, ita ut abscissa portio æquetur dato cono (Z X Y).*

*Not.* XP est altitudo coni, & Z Y diameter basis, Z P radius.

a 26 hujus.

b 7. 5.

c conf. &amp; \*

d 1. 6.

e conf. &amp; 7. 6.

f 11. I Apol.

g 11. 5.

h scb. ad fin.

i ult. 2 Apol.

k 28 hujus.

1. In parabolico conoide sit V K axis, & sectionis per axem parameter R; fiat verò 3 R. Z P :: Z P. G. & inter X P ac G reperiatur media proportionalis, cui æquetur V K; & per K ducatur planum B A axi rectum, erit portio B V A æqualis dato cono. Nam fiat  $K Q = \frac{1}{2} V K$ . 'ergo conus B Q A æquatur portioni B V A. Est verò Q K. X P <sup>b</sup> ::  $\frac{1}{2} V K$ . X P <sup>c</sup>  $\frac{1}{2} G$ . V K <sup>d</sup> ::  $\frac{1}{2} R G$ . R \* V K <sup>e</sup> :: Z P q. R \* V K <sup>f</sup> :: Z P q. B K q. <sup>g</sup> :: Q K. X P. ergo conus B Q A æquatur cono Z X Y. adeoque portio B V A cono Z X Y æquatur. Itaque si dato plano parallela ducatur D N tangens sectionem B V A in D; & ducatur diameter D E = V K; & per E ducatur planum S G ad D N parallelum; <sup>k</sup> liquet absolvi propositum.

2. In sphæroide, & conoide hyperbolico problema solidum est, cujus analysin subjungam. V T est axis. B A ad V T perpendicularis.

*Analysis.*

## Analysis.

In sphæroide sit  $VT = t$ . parameter  $VR = r$ .  $XP = m$ .  $ZP = n$ . conus  $BQA =$  port  $BVA$ .  $KV = a$ . unde  $BKq = ra - \frac{r}{t}aa$ .  $KV.KQ :: t - a. \frac{1}{2}t - a :: a. \frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} = KQ$ . Ob portio-  
nem  $BVA =$   
con  $BQA$ .

$XP. KQ :: BKq. ZPq$  ( ob con  $BQA =$  con  $ZXY$  )  
 $m. \frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} :: \frac{rta - raa}{t}. nn$ . ergo fit æquatio  $2ra^4 - 5tra^3 + 3ttaa$

$+ 2tmna - 2tmnn = 0$ . Ponatur  $r = n$ . erit  $a^4 - \frac{1}{2}ta^3 + \frac{1}{2}ttaa +$   
 $tmna - tmnn = 0$ . Ista veró æquatio dividitur per  $a - t$ , & fit  $a^3 - \frac{1}{2}$   
 $tan + tmn = 0$ . vel  $tmn = \frac{1}{2}taa - a^3$ .

Ejusmodi veró Problemata generalibus ex methodis optimè con-  
ficiuntur.

---

Addenda

---

## Addenda locis infrà citatis.

[Post Prop. IV.]

Schol.

**A**rchimedæ doctrinæ complendæ subijciemus antecedenti suppar circa reliquas sectiones conicas theorema.

Fig. 160.

Fig. 161.

*Si ab eadem hyperbola, vel ellipse quomodocunque refecentur due portiones (B V A, S D G), quarum à verticibus ad bases interceptæ diametri (V K, D E) semidiametris (C V, C D) proportionales sint, tam ipsæ portiones, quàm iis inscripta triangula æquabuntur.*

a cor. 16. 3.

Apol.

b cor. 36. 1 A.

pol. &amp; 2. 6 elem.

scoroll. inf.

Sit primùm altera diameter V K sectionis axis ; & sint C F, C H semidiametri ipsis C V, C D conjugatæ ; sectionem verò tangant rectæ (per vertices V, D ductâ) V M, D N concurrentes in M ; & per V ducatur L I K tangenti D N (ac ipsis proinde C H E o) perpendicularis. Demùm ducantur D P ad M V, & M Y ad V K parallelæ. Et quia rectangula triangula M Y D, V M X similia sunt ; est Y M. V X (V P. V X) :: D M. M V :: C H. C F. verùm ratio V P ad V X componitur è rationibus V P ad V N, & V N ad V X, hoc est è rationibus C V ad C N, & C N ad X L ; è quibus iisdem componitur ratio C V ad X L. ergo est C H. C F :: C V. X L. atqui per hypothesin est C V. V K :: C D. D E (hoc est) :: L X. X I ; permutandoque C V. L X :: V K. X I. ergo C H. C F :: V K. X I ; hoc est E S. K B :: V K. X I ; unde patet inscripta triangula B V A, S D G æquari ; sed & hinc ipsas portiones constabit è sequenti theoremate : unde colligetur (prorsus eodem modo sicut in hac Prop. 4.) universim præstitura conditione præditas portiones sibi met æquari.

Fig. 162.

163.

Sint duæ quælibet portiones ellipticæ vel hyperbolicæ B V A, S D G. quarum interceptæ diametri V K, D E semidiametris V T, D O proportionales sint, & altitudines (V K, X L) basibus (B A, S G) reciproce proportionentur (V K. X L :: S G. B A) : istæ portiones æquales erunt.

Diametri V K, D E similiter utcumque dividantur in punctis Y, P ; per quæ ducantur rectæ Z φ basi B A ; & rectæ Q R basi S G parallelæ : item per puncta Z, φ ducantur rectæ Z H, φ F ad diametrum



trum VT, & QI, RK ad diametrum DE parallelæ. Et quia CV.  
 VK<sup>a</sup>: CD. DE. <sup>b</sup>erit CV. CK:: CD. CE. & ideo CVq. <sup>a hyp.</sup>  
 CVq—CKq:: CDq. CDq—CEq. <sup>b cor. 19. 5.</sup> hoc est CVq. TK \* KV  
 :: CDq. OE \* ED. Item simili ratione, quia CV. VK<sup>a</sup>: CD. <sup>c 5. 2.</sup>  
 DE. & VK. VY<sup>d</sup>: DE. DP; adeoque ex æquo CV. VY:: <sup>d conf.</sup>  
 CD. DP; erit CVq. TY \* YV:: CDq. OP \* PD; & per-  
 mutando TY \* YV. OP \* PD:: CVq. CDq:: TK \* KV. OE  
 \* ED. Et rursus permutando TK \* KV. TY \* YV:: OE \* ED.  
 OP \* PD; hoc est BAq. Z φq:: SGq. QRq; & BA. Z φ:: <sup>e 21. 1 Apo.</sup>  
 SG. QR; adeoque permutando BA. SG:: Z φ. QR. Cum igitur  
 sit BA. SG<sup>a</sup>: XL. VK; <sup>f</sup>erit Z φ. QR:: XL. VK. Est ve- <sup>f 11. 5.</sup>  
 rò XL. NL<sup>b</sup>: DE. PE<sup>d</sup>: VK. YK; & permutando XL. VK <sup>g 2. 6.</sup>  
 :: NL. YK; <sup>f</sup>ergo Z φ. QR:: NL. YK. <sup>h 16. 6.</sup> unde parallelogramma  
 ZHFφ, QIKR æquantur: quod cum omnibus ejusmodi paral-  
 lelogrammis (utrique portioni inscriptis aut circumscriptis) conveniat,  
 satis perspicuum est ipsas portiones BVA, SDG æquari.

Hanc propositionem Vinc. Viviani primus, opinor, detexit, nec  
 ideo laude suâ fraudandus: hæc autem demonstratio de penu no-  
 firo.

in fig. præced.

Coroll. BA. SG:: CF. CH:: Z φ. QR.  
 BA. SG:: VM. DM.

[Ad Prop. XXXIII.]

Schol.

Si conoidis hyperbolici duæ portiones (BVA, SDG) refecentur, Fig. 164.  
 quarum axes (VK, DE) accedentibus axi (CV, CD) proportiona-  
 les sint, ipsæ portiones æquales erunt.

Sit primum axium alter VK basi rectus; secetur autem conois a 12 hujus A.  
 plano per axem ad planum SG recto faciente hyperbolen, in qua  
 portiones BVA, SDG, quarum diametri VK. DE. tangant verò  
 sectionem rectæ VM, DM; & sit DP ad SG perpendicularis. Et <sup>b hyp.</sup>  
 quoniam est CV. VK<sup>b</sup>: CD. DE. <sup>c</sup>erit DM. MV:: GS. AB. <sup>c cor. sch. 4. h.</sup>  
<sup>d</sup>ergo AB est alter axis ellipsis, quæ basis est portionis SDG. Item <sup>d cor. 14 huj.</sup>  
 est DP. VK<sup>c</sup>: BA. SG<sup>e</sup>: BAq. BA \* SG<sup>f</sup>: BAq. ellips. <sup>e 1. 6.</sup>  
 BA. SG. <sup>f</sup>ergo segmenta conica BVA, SDG æquantur. Cum <sup>f 6 hujus.</sup>  
 igitur sit port BVA, segm con BVA<sup>h</sup>: 3CV + YK. 2CV + <sup>g sch. 11 h.</sup>  
 YK <sup>h 30 hujus.</sup>

131 huj.  
k not. infra.

114. 5.  
m 15. 5.

n 11. 5.

$VK^k :: 3CD + DE. 2CD + DE^l ::$  port SDG. legm con SDG. ergo quoque portiones BVA, SDG æquantur.

Not. (Quia  $CV. VK :: CD. DE.$  est  $3CV. VK^m :: 3CD. DE.$  & componendo  $3CV + VK. VK :: 3CD + DE. DE.$  & permutando  $3CV + VK. 3CD + DE :: VK. DE.$  Simili processu est  $2CV + VK. 2CD + DE :: VK. DE.$  "quare  $3CV + VK. 3CD + DE :: 2CV + VK. 2CD + DE.$  & permutando.)

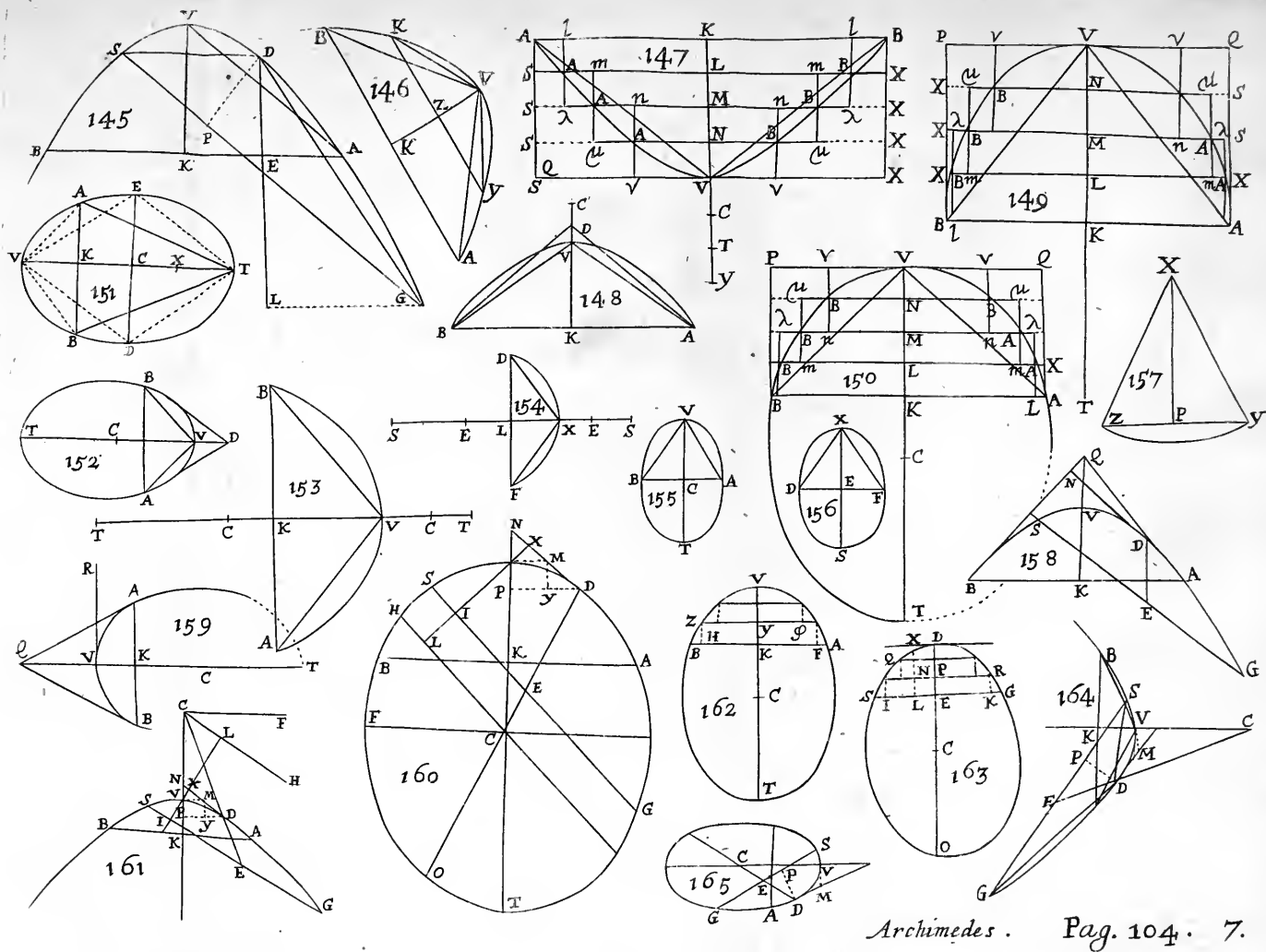
Hinc universim, positâ conditione præditæ portiones æquantur: æquantur enim omnes portioni rectæ BVA. ergo inter se.

[Ad Prop. XXXVII.]

Schol.

Fig. 165. Si Sphaeroidis dua portiones (BVA, SDG) rescentur, quarum axes (VK, DE) axibus integris, vel semiaxibus (VC, DC) proportionales sint, æquales erunt portiones.

Omnino tali discursu probatur, quali theorema Scholii prop. 33. tantum loco cor. prop. 14. adhibetur coroll. prop. 15 hujus. Quid plura?







# DE PLANORUM ÆQUILIBRIIS, SIVE Centra Gravitatum in Planis.

**L**ibra, generaliter accepta, aliàs Latinis *Statera*, *trutina*, *lanx*, *bilanx*; Græcis ζυγός & ζυγὰ; τάλανον & πύλανα; σαδμὸς, σαδμίων, & σαδμία; πλασίσις, τετάρην) est machina, vel instrumentum magnitudinum, mediante pondere per ipsum explorato, quantitativis dimetiendis & dignoscendis comparatum; juxtaque Mathematicam abstractionem, & simplicitatem considerata, nil aliud est, quàm linea quedam recta, indefinitè utrinque protensa, in qua punctum aliquod, immobili sustentaculo fultum, instarque centri fixum persistit (centri proinde nomine donatum) dum linea circa ipsum pars utraque ponderis ubivis incumbens, aut appensi nisu, premitur aut attrahitur; ita quidem ut prævalens grave partes, quibus annectitur, deprimat, adversasque consequenter elevet; at si contranitentia gravia paribus certent efficacis, tota situm conservet, & in æquilibrio perseveret. Satis verò constat, experienciâ suffragante, ponderum in libra vires (sicut & potentias motivas in vecte, similibusque machinis) à duabus omnino causis dependere; ab ipsius scilicet absoluto pondere, vel ab ipsa magnitudinis (intra certam aliquam physicam speciem consistendo) quantitate) & ex ejus à centro distantia. Nam & majus pondus ad eandem distantiam, & æquale pondus ad eandem distantiam gravitandi efficaciam præpollere compertum est. Verùm ad posteriorem causam attendendo, quâ propter ipsam exactâ ratione crescant aut minuantur vires, haud ita facile discernatur aut demonstretur à prio-

Fig. 166.

vi. Sanè quòd æqualium ponderum vires eàdem cum distantis suis proportionè iustè crescant, alterum est è præcipuis totius Staticæ, quam habemus, & totius Mochlicæ (totiusque proinde Mechanicæ) fundamentis; cui tamen an sola Geometria, vulgaribus utens postulatis & hypothesibus astruendo sufficiat, equidem non leves sunt causæ dubitandi. Non aliud adsumit huius Author Libelli (rem simpliciter & summam exprimeredo) huic principio stabiliendo, quàm idem (vel æquale) pondus in maiore distantia magis gravitare, quo concesso vix elici posse videtur ponderis eiusdem vires distantis accuratè proportionari: cur enim inde colligatur eàdem potius quàm alià quavis proportionè gravitationem istam increfcere. Istuc nihilominus enititur hic Author, quo successu non disputo (cum brevitati consulens, tum quia Censorem hîc non ago, nec Advocatum, sed Interpretem). Ceterum an pro genuino Archimedis fætu sit agnoscendus hic libellus, & prorsus idem sit cum eo, quem τὸ ῥημῶν nomine inscriptum aliquoties allegat Archimedes (de quadr. parab. prop. 6. & 10.) cum pluribus de causis ambigere liceat, nil tamen admodum refert anxie disquirere; talis saltem apparet, ut integram suam perfectionem vel non adeptus primo fuisse, vel postea non retinuisse videatur. Sunt tamen in eo, quæ tanti parentis indolem aliquatenus sapiunt, nec Archimedeum planè dedecent acumen. Utcunque perquam utilis est, ut qui primò præcipua Statices elementa sternit, & quantum forte rei natura fert, confirmat; tum figurarum planarum rectilinearum, centra gravitatum, exquisitâ sanè methodo multisque posteriorum ratiociniis lucem præferente consignat. Superficiebus autem gravitatem assignare non videretur; quidni, æquè ac quantitatem? idem de lineis dictum intellige.

## Postulata, seu Hypotheses.

Petimus (vel supponimus)

- I. **Æ** Qualia gravia ab equalibus longitudinibus (sen distantiis) æquiponderare.

## Schol.

Equalia gravia, magnitudine, siquidem homogenea sunt; sin specie diversa, saltem absoluto pondere; longitudines autem intelligit à centro libræ (hoc est ab immobili libram sustinenti puncto) ad centra gravitatis appensorum ponderum (vel ad rectas saltem horizonti perpendiculares per dicta centra transeuntes) protensas. Cum verò de gravitatis centro hîc potissimum agatur, mirum videatur (vide num id Librum hunc imperfectum & ἀνίκαλον arguat) nullam centri talis definitionem comparere. Inesse gravi cuicunque magnitudini punctum aliquod unum, ejusquam gravis exactè medium, & æqualibus undiquaque momentis stipatum, à quo suspensum vel utcunque sustentatum grave persistet immotum, & ad nullas undicunq; partes vergens aut propendens, à nonnullis postulatur, \*alii probare conantur. Illud verò gravitatis centrum appellatur, & à Pappo sic definitur: Dicimus autem centrum gravitatis singuli cujusque corporis esse punctum quoddam intus situm, à quo cogitatione suspensum grave quiescit, & delatum conservat eam, quam ab initio habuit, positionem, neutiquam in latione sua circumlatum. \* Lucas Val. pos. I. vide Pappum I. VIII. Vide sisinfra Schol. Prop.

Sit, ex. gr. sphæra, cujus diameter A B horizonti parâllela, vel obliqua; si concipiatur hæc appendi perpendiculo Z C ad centrum C, perstabit immota; dimissa verò recta procedet; at si perpendiculo Y D appendatur eadem ad aliud diametri punctum D, gyrationem concipiet circa punctum D, & nunquam consistet, donec punctum C, adeoque tota recta A B perpendiculo Y D protracto coincadat: unde punctum C erit centrum gravitatis sphæræ. (Ita Pappi definitionem interpreter, nonnihil à lectione discedens, quam Commandinus exhibet; nempe pro ἡμετέρι φερόμενον, & φυλάσσει τιμὴ ἐξ ἀρχῆς δέσιν (quod sensum præfert perobscurum, ut videtur, & perplexum) lego (tantum unam voculam transponendo) ἡμετέρι, & φερόμενον φυλάσσει δέ; forsân verò scripserit Pappus; ἡμετέρι, φερόμενον δέ; facile siquidem fuit scriptori characterem voculæ &, pro characterē quo designatur

Fig. 167.

\* Nullâ vertigine circumlatum.

tur & accipere) rei pleniori intelligentiæ quasdam aliorum scriptorum definitiones subjungam.

Lib. de centro  
grav. solidorum.

*Commandinus.* Centrum gravitatis uniuscujusque figuræ solidæ est punctum illud intra positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt.

*Lucas Valerius.* Cujuslibet figuræ gravis centrum gravitatis est punctum illud, a quo suspensum grave per se manet partibus quomodocunque circa constitutis.

*Stevinus.* Gravitatis centrum est ex quo vel solâ cogitatione suspensum corpus quomocunque situm dederis, illum retinet.

*Idem.* Gravitatis centrum est per quod plana quævis ducta corpus in duas partes æquales dividunt.

\* ποῦς.

Quæ de solidis illi pronunciant, tu superficiebus & lineis applica, debitam observans analogiam; & adde subsequentem *Eutocii* Commentatiunculam: *Archimedes* (inquit) in hoc libellò centrum \*propensionis figuræ planæ reputat, à quo suspensa manet horizonti parallela; duorum autem vel plurium planorum centrum propensionis (vel ponderationis) à quo jugum (hoc est *Libra*, vel *Statera*) suspensum horizonti existit parallelum.

*Coroll. 1.* Ex his, & axiomate præmissò consequatur, quòd libræ centrum est centrum gravitatis gravis ex æqualibus gravibus ad æquales distantias appensas compositi.

2. Etiam ex hoc axiomate colligitur Gravis cujuscunque multiplex ad eandem vel æqualem distantiam, æquè multiplex habere momentum momenti primo gravi competentis (momentum appellamus vim gravitandi, situ gravis simul ac absoluto pondere consideratis). Nam singuli gravis æqualis appositio momentum æquale confert. Ergo totius multiplicis momentum aggregabitur è tot æqualibus momentis, quot ipsum partibus æqualibus constat.

Similiter, æquiesceto gravi quocunque, momentum ejus (ad æqualem distantiam) æquiescabitur.

3. Sequitur unicum cujuscunque magnitudinis fore centrum gravitatis.

Aliàs duæ rectæ parallelæ (vel duo plana æquidistantia) magnitudinem in partes æquiponderantes dividerent, hoc est pars toti æquiponderet.

II. Æqualia verò gravia ab inæqualibus distantis non æquiponderare, sed ad illum grave propendere, quòd magis elongatur.

Sch.



*Sch.* *Æquè* patet hoc : si gravium *æqualium* alterum præponderat, illud à libræ centro remotius est.

III. Siquidem, cum à quibusdam distantis gravia *æquiponderent*, alteri gravium adjiciatur aliquid ; non *æquiponderari*, sed ad illud grave propendere, cui quid adjectum est.

*Æquè* liquet, si gravia à quibusdam distantis *æquiponderet*, eorum alterum magis elongatum præponderare, minúsque distans elevari.

IV. Quinetiam similiter, si à gravium (*æquiponderantium*) altero quippiam auferatur, *æquilibrium* non fieri, sed ad illud grave inclinari, à quo nil ademptum est.

*Æquè* clarum est, si gravibus *æquiponderantibus* adjiciantur vel adimantur *æquiponderantia*, *æquilibrium* persistere.

V. *Æqualium* & similium figurarum planarum invicem congruentium, & centra gravitatum mutuo congruere.

Idem de magnitudinibus aliis (corporibus & lineis) *æquè* verum & manifestum est.

VI. In*æqualium* autem & similium (figurarum) centra gravitatum similiter erunt posita.

#### *Definitio.*

VII. Puncta verò similiter poni dicimus ad similes figuras, à quibus ad *æquales* angulos ductæ rectæ faciunt angulos cum homologis lateribus *æquales*.

*Ex g.* In similibus triangulis ABC, DEF, si à punctis Z, Y ducantur ad angulos rectæ ; fuerint verò singillatim anguli ad Z *æquales* angulis ad Y ; qui nempe lateribus triangulorum homologis opponuntur. quin & anguli ZAB, YDE ; & ZAC, YDF, & reliqui reliquis, qui homologis eorundem lateribus adjacent, pares fuerint ; similiter poni dicentur hæc puncta Z, Y.

Fig. 168.  
169.

VIII. Si magnitudines à quibusdam distantis *æquiponderent*, & ipsis *æquales* ab iisdem distantis *æquiponderabunt*.

IX. Omnis figuræ, cujus perimenter ad easdem partes est cava, Fig. 170.  
centrum gravitatis intra figuram sit oportet.

Sit in talis figuræ (ABC) perimetro punctum quodvis B, per quod recta linea, vel planum (IX) figuram contingat ; sanè liquet punctum

*Vide defin. ad  
post. 1.*

¶ Cum B non esse centrum gravitatis figuræ, quia totum pondus ad unam ipsius X T partes jacet ac propendet; multò minùs ex simili causa punctum D, extra figuram situm, erit centrum gravitatis dictæ figuræ. Idem in ipsis lineis ad easdem partes cavis intellige; earum nempe centrum gravitatis nec in ipsis, nec ad ipsarum partes convexas, sed intra cavum existere.

*Prop. I.*

*Conversa 1.  
post.*

*Quæ ab æqualibus distantis æquiponderant gravia, sunt æqualia.*

*a 1 post. buj.  
b 3. post. buj.*

Nam si alterutrum excedat, excessu dempto, residuum alteri æquabitur, & <sup>a</sup>æquiponderabit; <sup>b</sup>unde tota non æquiponderabunt, adversùs hypothefin. ergo neutrum excedit. *Q.E.D.*

*Schol.* Hoc æquè verum adde: Quæ ab æqualibus distantis non æquiponderant, sunt inæqualia.

*c 1. post. buj.*

Nam si æqualia essent, <sup>c</sup>æquiponderarent, contra hypothefin.

Et hoc: Si gravia æqualia æquiponderent, distantia sunt æquales. Nam si inæquales essent, non æquiponderarent, contra hypothefin.

*Prop. II.*

*Inæqualia gravia ab æqualibus distantis non æquiponderant, sed ad majus vergent.*

*a 1. post. buj.  
b 3. post. buj.*

Nam si à majori dematur excessus, residuum æquabitur & <sup>a</sup>æquiponderabit minori: quare totum majus <sup>b</sup>præponderat. *Q.E.D.*

*Schol.*

Momenta ponderum ad eandem (vel æqualem) à libræ centro distantiam, ponderibus ipsis proportionalia sunt.

*Fig. 171.*

Gravium A, B ad æquales distantias CA, CB appensorum momenta sint  $\alpha$ ,  $\epsilon$ . Sit autem M utcumque multiplex gravis A, &  $\mu$  æquè multipulum momenti  $\mu$ . <sup>a</sup>ergo  $\mu$  est momentum gravis M ad distantiam CA. Similiter ipsorum B,  $\epsilon$  sumptis æquè multiplis N,  $\nu$ ; erit  $\nu$  momentum gravis N ad B appensi: quòd si  $M = \frac{\alpha}{\epsilon} N$ , erit respectivè  $\mu^b = \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\epsilon}{\nu} \nu$ . unde A. B ::  $\alpha. \epsilon$  *Q.E.D.*

*a 2 cor. 1. post.*

*b 1 post. buj.  
c 2 hujus.*

Hiscè verò suppositis.

*Prop.*

## Prop. III.

*Inæqualium æquiponderantium (A, B) distantia (C A, C B) sunt Fig. 172.*  
*inæquales; & minor (C A) majoris (A).*

Sit enim  $A - X = B$ . ergo ad has distantias præponderabit B ipsi  
 $A - X$ . quapropter erit  $C B \sqsubset C A$ . *Q.E.D.*

*Coroll.* Simili modo liquet ab inæqualibus distantis (C A, C B)  
 æquiponderantium (A, B) id majus esse, quod est à minore distantia  
 (C A).

Sit enim  $C Q = C A$ . ergo B ad distantiam C Q minùs ponde- *a 2 post. huj.*  
 rat, quàm ad distantiam C B, <sup>b</sup> hoc est quàm A ad distantiam C A. *b hyp.*  
 unde liquet esse  $B \sqsupset A$ . *Q.E.D.* *c sch. 1. & 2 h.*

## Prop. IV.

*Si due æquales \* magnitudines (A, B), non idem habean-  
 t centrum gravitatis, ex ambabus composita magnitudi-  
 nis (A + B) centrum gravitatis erit medium (C) recta  
 (A B) conjungentis centra gravitatis magnitudinum.*

Fig. 173.

*\* Magnitudines æquales ho-  
 mogeneas intellige, tum híc,  
 tum in sequentibus; vel æ-  
 qualia due pondera, (nam  
 de æqualibus magnitudinibus specie differentibus (aut saltem pondere diversis) non valet.)*

Quòd centrum compositæ magnitudinis  $A + B$  sit in recta A B,  
*π ε ρ δ ι δ ε ι κ ζ*, inquit Auctor; unde colligitur in editis libris aliquid  
 deficere, nam tale quid nullibi præmonstratum apparer: nos illud  
 verò, simul ac illam, quæ præ manibus est, propositionem è defini-  
 tione centri gravitatis utcunque deduximus. vide *Coroll. Scholii ad*  
*1 post hujus.*

## Prop. V.

*Si trium magnitudinum (A, C, B) centra gravitatis (A, C, B) in  
 directum posita sint, & æqualem magnitudines gravitatem habeant, &  
 quæ inter centra sunt recta (C A, C B) æquales sint, ex omnibus compo-  
 sita magnitudinis centrum gravitatis erit punctum (C) quod & centrum  
 gravitatis est ipsarum mediæ (C).*

Nam quia magnitudo C æquilibratur in puncto C, & huic utring; *vide sch. ad 4.*  
 ad æquales distantias accedunt æqualia pondera A, B, non mutabitur *post. hujus.*  
 æquilibrium.

Vel

a a hujus.  
b hyp.

Vel sic: quia punctum C est centrum gr. ipsius A + B, & ipsius C; <sup>a</sup> erit totius A + B: + C centrum gravitatis inter C, & C medium, hoc est ipsum C.

Coroll.

1. Exhinc pater, quòd si quotcunque magnitudinum multitudine imparium centra gravitatis in directum posita sint, siquidemque tum æqualiter à media magnitudine distantes æqualem gravitatem habent, tum rectæ ipsarum centris interjectæ æquentur: ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum, quod & ipsarum mediæ centrum est gravitatis.

2. Sin autem multitudine pares sint magnitudines, & centra gravitatis ipsarum in directum posita sint, & ipsarum mediæ (\*necnon æqualiter utrinque distantes à mediis) æqualem gravitatem habeant, & centris interjectæ rectæ æquentur; ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum medium rectæ centra mediarum connectentis, ut subscriptum, (& in apposita figura expressum vides.

\* Ista verba desunt in exemplaribus; at supplenda esse cum res ipsa docet, tum hujus applicatio in prop. IX (vel 7 in Basileensi Græca) ubi habentur verba,  $\alpha\gamma\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\pi\rho\sigma\tau\upsilon\phi\chi\psi\omega\pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha\tau\omicron\upsilon\tau\alpha\tau\omicron\epsilon\phi\epsilon\tau\alpha\iota\tau\omicron\upsilon\tau\omicron\mu\epsilon\sigma\omega\tau\omicron\upsilon\tau\omicron\epsilon\tau\alpha\iota$ .

Fig. 174.

Prop. VI.

Fig. 175. Commensurabiles magnitudines (Z, Y) æquiponderant à distantis eandem reciprocè proportionem habentibus cum gravibus.

a hyp.  
b 10. 10.  
c 3. 10.  
d 2 ax. 1.  
e const.  
f 2 ax. 10.  
g 15. 5.  
k prius.

Sint CA. CB :: Z. Y. ergo cum <sup>a</sup> sint Z, Y commensurabiles, <sup>b</sup> erunt quoque rectæ CA, CB commensurabiles; <sup>c</sup> sit igitur harum communis mensura M; fiant verò AE, & AD singulæ æquales ipsi CB, & BF = CA. <sup>d</sup> ergo est EB = CA = BF; & EF = 2 CA; <sup>e</sup> ac ED = 2 CB. <sup>f</sup> ergo M ipsas EF, ED metitur; & est EF. ED :: <sup>g</sup> CA. CB <sup>h</sup> :: Z. Y. quoties autem M metitur EF, toties quædam X metiatur Z. quapropter erit M. EF :: X. Z. <sup>k</sup> Item est EF. ED :: Z. Y. ergo erit ex æquo M. ED :: X. Y. adeoque quoties M metitur ED, toties X metietur Y; & est X mensura communis ipsarum Z, Y. Itaque si dividatur EF in partes æquales ipsi M, & Z in totidem æquales ipsi X, & singulis ipsius EF particulis ad ipsarum medium punctum appendatur æqualis ipsi X, harum omnium gravitatis centrum erit punctum B (siquidem æquineræ sunt hinc inde.) Similique prorsus ratione punctum A centrum gravitatis erit tot eidem X æqualium, quoties M continetur in ED, ipsam Y com.

componentium, & similiter dispositarum. Harum autem omnium gravitatis centrum erit punctum C, rectam F D bifecans (quippe D A = C B, & A C = B F, ac ideo C D = C F) ergo si Z ponatur ad B, & Y ad A, hæc ad distantias C B, C A æquiponderabunt. *Q. E. D.*

*Coroll.*

Si sit  $Z. Y \rightarrow C A. C B.$  præponderabit Y ad A posita ipsi Z ad B constitutæ, & vice versâ; si Y præponderet ipsi Z, erit  $Z. Y \rightarrow C A. C B.$

*Schol.*

Non ignoro contra discursum huic quædam objectari, quin ipse superius innui principiis ipsis suspicionis causam subesse: sed non est animus disputare, nec incumbit mihi iudicium interponere. Refero mentem auctoris, eam neq; tuebor, nec impugnabo. In altero de æquiponderantibus, qui vulgò inscribitur libro, ratiocinium adhibet. *Prop. I.* ab hoc nonnihil diversum, sed eisdem exceptionibus obnoxium.

*Prop. VII.*

Quinimò si incommensurabiles sint magnitudines (Z X Y) à distantiiis (C B, C A) eandem reciprocè cum magnitudinibus proportionem habentibus æquiponderabunt. *Fig. 176.*

Si neges; alterutra Z X præponderet, itaque minor eâ quædam æquiponderabit; hanc inter & totam Z X assumatur media quævis Z, ipsi Y commensurabilis. <sup>a</sup> Patet Z (quoniam æquiponderante major est) ipsi Y præponderare: Verùm ob  $Z. Y \rightarrow (Z X. Y^c) C A. C B;$  <sup>b</sup> præponderabit Y ipsi Z: quæ repugnant. *a lemm ad 8. 5. Theod. b 3 post. hujus. c const. d 8. 5.*

Similiter è distantiiis arguamus licet. Si Z X præponderet ad distantiam C B, æquiponderet ad E, & inter C B, C E media assumatur aliqua C D ad C A commensurabilis; <sup>e</sup> ergo Z X præponderabit ad D. Sed contra quia  $Z X. Y^c: (C A. C B)^d \rightarrow C A. C D.$  <sup>f</sup> præponderabit Y ipsi Z X ad D posita: quæ rursus adversantur sibi. *e hyp. f coroll. præc. k ad 3 post.*

Ex duabus præcedentibus universalis conflatur hæc propositio: *Gravia quælibet è distantiiis reciprocè proportionalibus æquiponderant.*

Quæ simul ac semel hoc modo succinetiùs (& Archimedeis fermè principiis insistendo) ostendi possit. Sit recta quævis A B, utrunque secta in D: bisectis partibus D A, D B in E, & F, totaque A B bisectâ in C; liquet E fore centrum partis D A, & F partis D B, &

*Fig. 177.*

C totius A B ; adeoque D A — D B sustentata in C æquilibrabitur.  
 Cum igitur sit  $E C = \frac{1}{2} A B - \frac{1}{2} D A$  ; &  $F C = \frac{A B - D B}{2}$ . ade-  
 oque  $E C . F C :: A B - D A . A B - D B :: D B . D A$  : sunt re-  
 ctæ D A, D B centrorum distantis E C, F C. reciproce proportio-  
 nales : & cum hisce rectis quælibet gravitates, ipsarum magnitudini-  
 bus proportionales, assignari possint, æquè de quibuscunque gravibus  
 hoc verum erit.

Cæterum ex hoc Palmario, totiusque Staticæ præcipuo theoremate  
 complura subnascuntur Corollaria.

I. Si gravia qualibet è quibuscunque distantis æquiponderent, etiam  
 iis proportionalia quævis gravia ab iisdem distantis (homologa homolo-  
 gis) æquiponderabunt.

11. 5. Retinebitur enim reciproca gravium & distantiarum proportio-  
 nalitas.

II. Si æquiponderantibus addantur aut subtrahantur æquiponde-  
 rantia, tota vel residua æquiponderabunt.

12. 5. Nec enim hæc immutabitur reciproca proportionalitas.

Axiomatis accenseretur meruit hæc propositio, supra nobis, Ubaldo,  
 & aliis.

Fig. 178. III. Æqualium gravium (A, B) momenta distantis suis (C A,  
 C B) proportionalia sunt.

Quævis assumptâ distantia C'Q concipiatur esse Z.  $A :: C A . C Q$ .  
 ærgo ponderis Z ad Q suspensi momentum æquatur momento pon-  
 deris A ad distantiam A C. Item sit B (vel A).  $Y :: C Q . C B$ .  
 ærgo momentum ponderis Y ad Q æquatur momento ponderis B  
 ad distantiam B C. Est autem ex æquo  $Z . Y :: C A . C B$  ; & mo-  
 menta ponderum Z, Y ad Q suspensorum bispis Z, Y prodortionalia  
 sunt. ergo liquet propositum.

b scb. 2 huj.

IV. Quorumcunque gravium (A, B) ad quascunque distantias  
 momenta compositam habent è ponderum ipsorum & distantiarum (C A,  
 C B) proportionibus rationem.

Nam momentum ponderis A in A positi ad momentum ponderis  
 B in B, rationem habet compositam è ratione momenti ponderis A  
 in A ad momentum ponderis A in B positi (hoc est è ratione distan-  
 tiæ

tix CA ad CB) & è ratione momenti ponderis A in B ad momentum ponderis B in B positi (hoc est è ratione ipsius A ad B). Hinc e[st] scilicet, 2. huius. verò

V. Momenta gravium se ad invicem habent, ut ipsa gravia ducta in suas distantias.

Nempe CA × A repræsentat momentum gravis A ad distantiam AC, & B × BC momentum exhibet gravis B ad distantiam BC.

Hinc quod è gravi in suam distantiam ducto provenit, à quibusdam momentum appellatur; quale momentum notum & distantix applicatam exhibebit ipsum grave; per ipsum verò grave divisum distantiam notificabit.

VI. Si recta (AB) duarum quarumvis magnitudinum centra (A,B) connectat, ex iis composita magnitudinis centrum in ista recta (AB) existet. Fig. 179.

Nam si divisa concipiatur recta AB in C, a sic ut sit A. B :: C B. a 10. 6. CA, b magnitudines A, B ad distantias CA, CB æquiponderabunt; b 6 & 7. adeoque punctum C erit centrum gravitatis compositæ A+B, unde c not. ad 1 post.

VII. Si quocunque magnitudinum centra sint in una recta, compositæ ex omnibus magnitudinis centrum in eadem existet.

Nam compositæ ex duabus quibuscunque centrum in illa d[er]it, d 6 cor. tum ejus compositæ, ut unius, & tertiæ centrum in eadem erit; ac harum trium, & alterius quartæ consimili pacto, & sic porro, donec ad omnium summam perventum est.

### Prop. VIII.

Si ab aliqua magnitudine (MNO) detrahatur magnitudo (MNP) Fig. 180. non habens idem centrum cum toto, reliqua magnitudinis (NPO) centrum gravitatis est, si recta (AC) gravitatum centra, totius magnitudinis, & ablata connectens, protrahatur ad easdem partes, ad quas est totius magnitudinis centrum (C), & accipiatur quedam (CB) è protracta dicta centra conjungente, sic ut eandem rationem habeat ad illam (CA) centris (CA) interjectam, quam habet gravitas ablata magnitudinis (MNP) ad gravitatem reliqua (NPO), acceptæ terminus (B).

2 Pater enim centra totius & partium in una recta (BC) versari; a 6 cor. præc. positoque puncto D residuæ NPO centro, quia C totius MNO b hyp. centrum est, b & A partis MNP, c erit CD. CA :: MNP. NPO c 6 & 7 huius.

Q, 2

b:: CB.

d 9. 5.  
e consl.

b.: CB. CA. <sup>d</sup>ergo  $CD = CB$ : & puncta D, B coincidunt, <sup>e</sup>quare B est centrum partis N P O. Q.E.D.

Coroll.

Fig. 181.

Ex his faciliè (juxta methodum, vel hypothésin indivisibilium) confectatur centrum gravitatis figuræ cujuslibet planæ in ejus, siquam habet, diametros (hoc est in recta basi parallelas rectas bifecante) versari; necnon centrum gravitatis figuræ cujusunque solidæ in ejus axe (hoc est in recta per parallelorum basi planorum centra transeunte) reperiri.

a 7 cor. præc.

Nam quia, verbi gr. centra rectarum M N (basi B A parallelarum) sunt in diametro V K, <sup>a</sup>erit ex omnibus constitutæ figuræ V B A centrum in eadem V K. Idem de solidis liquidò clarum est; quin & de superficiebus, & lineis quibuscvis axem habentibus, aut axi rectam analogam.

Prop. IX.

Fig. 182.

Omnis parallelogrammi (M N O P) centrum gravitatis existit in recta (V K) oppositorum parallelogrammi laterum bisegmenta connectente.

Ex præcedente corollario satis liquet, at morosius Archimedes hoc modo.

Si negas, esto centrum alicubi extra V K in D; per quod ducatur D C ad M N parallela. Continuâ jam æquifectiōe rectæ V N aliquando <sup>a</sup>relinquetur segmentum  $V K \rightarrow C D$ ; similiterque divisâ V M, si per utriusque segmenti (V N, V M) divisiones ducantur ad V K parallelæ, dispartietur totum parallelogrammum M O in parallelogramma <sup>b</sup>similia, & æqualia ipsi Q K, & ad utraqve rectæ V K partes æquimera; [\*quin & horum omnium centra sunt in una recta, pariter à se dissita;] <sup>d</sup>ergo totius ex his compositi parallelogrammi M O centrum existet in recta mediorum centra connectente. Verùm D extra medium Q K situm est. ergo D non est centrum, contra quod ipse asseruisti.

Aliter.

Fig. 183.

Sint A, B centra parallelogrammorum M K, V O, quæ connectat recta A B, secans ipsam V K in C, ducanturque A K B V. & quoniam parallelogramma M K, V O <sup>f</sup>æqualia sunt, ac <sup>e</sup>similia, si jungantur ea, ipsorum centra congruent. Quare rectæ A K, B V (ad

a cor. 1. 10.  
b 20. 1. & 1.  
d f. 6.  
e 36. 1.  
d cor. 5.

\* Hec sumit autor, ast ubi præcavit, non reperiō; expende sis annon principium petat.

f 36. 1.  
g 29. 1. & 1.  
d f. 6.



ad æquales & congruentes angulos ductæ) congruent, ut & anguli <sup>h 5. post. hujus</sup>  
 $VKA, KVB$ : sed & anguli  $ACK, VCB$  <sup>k 15. 1.</sup> pares sunt. <sup>l 26. 1.</sup> ergo re-  
 ctæ  $CA, CB$  congruent, & æquales erunt. <sup>m 7. 5.</sup> ergo  $CA, CB$ : pgr  
 $VO, VP$ ; <sup>n vid. 6 cor. 7.</sup> consequenterque punctum  $C$  est centrum totius paralle-  
 logrammi  $MO$ . *Q. E. D.* <sup>hujus.</sup>

*Coroll.* Simul patet centrum  $C$  rectam  $VK$  bisecare. Nam recta  
 $CV, CK$  congruent.

Simili discursu ostendetur in *circulo, ellipse, sphaera, spheroides, (ta-* Fig. 184.  
*libusque cæteris figuris)* idem esse centrum gravitatis, & ipsius figuræ.

Sit enim  $VK$  diameter, &  $A, B$  centra gr. segmentorum  $VMK,$   
 $VNK$ ; quæ, segmentis congruentibus, congruent. adeoque trian-  
 gula  $ACK, BCV$  congruent; & propterea  $CA = CB$ ; ac  
 $VMK. VNK :: CB. CA$ . adeoque  $C$  est centrum gr. totius.  
 quinetiam  $CV = CK$ ; & proinde  $C$  est centrum figuræ. Liquer  
 igitur.

### Prop. X.

*Cujuscunque parallelogrammi (MNOP) centrum gravitatis est* Fig. 185.  
*punctum (C) in quo diametri conveniunt.*

Recta  $VK$  bisecet adversa parallelogrammi latera  $MN, PO$ ; &  
 $EF$  bisecet latera  $MP, NO$ . igitur in utraque  $VK, EF$  est cen- <sup>a 9 hujus.</sup>  
 trum gravitatis parallelogrammi  $MNOP$ ; <sup>b 10 ax. 1. el.</sup> ergo intersectio  $C$  est  
 centrum: sed & in hoc diametri conveniunt: nam connexis  $CM,$  <sup>c const. & 34. 1.</sup>  
 $CO$ ; quia  $CK = CV$ ; &  $KO = VM$ , & ang  $CKO$  <sup>d 29. 1.</sup>  
 ang  $CEM$ , est ang  $KCO =$  ang  $ECM$ ; adeoque  $OCM$  est <sup>e 4 1.</sup>  
 linea recta: quare diameter  $MO$  per  $C$  transit. Simili discursu du-  
 ctæ diameter  $PN$  per  $C$  transibit. Et liquet propositum. <sup>f 2 sch. 15. 1.</sup>

### Prop. XI.

*Si duo triângula (VBA, XDE) similia sint inter se, & in ipsis* Fig. 186.  
*puncta (C, K) posita simili ter ad triângula; unumque punctum (C)* Fig. 187.  
*triânguli in quo existit centrum sit gravitatis, etiam reliquum punctum*  
*(K) est centrum gravitatis triânguli, in quo existit.*

Si negas, aliud  $Z$  centrum esto; rectæque ducantur à punctis  $K,$  <sup>a hyp.</sup>  
 $C, Z$  ad angulos æquales  $D, B$ ; &  $E, A$ . Et quia puncta  $Z, C$  sunt si- <sup>b 6 post. hujus.</sup>  
 milium triângulorum  $XDE, VBA$  <sup>c 7 post. hujus.</sup> centra, similiter erunt posita;  
 quapropter anguli  $ZDE, CBA$  pares sunt. At verò quia puncta  
 $K,$

<sup>d</sup> 1 ax. 1. el.  
<sup>e</sup> 9. ax. 1.

K, C<sup>b</sup> similiter posita sunt, <sup>c</sup> etiam ang K D E = ang Z D E. <sup>d</sup> ergo anguli K D E, Z D E æquantur. <sup>e</sup> Q. E. A.

## Prop. XII.

Fig. 188.

189.

Si duo triacula (V B A, X D E) similia sint, unius autem triaculi (V B A) gravitatis centrum (C) sit in recta (V L) ab angulo quopiam ad mediam basin ducta, etiam reliqui triaculi centrum gravitatis erit in consimili ducta recta (X M).

a 10. 6.

b hyp.

c 6. 6.

d const.

e 7. post. hujus.

f hyp.

g 6. post.

<sup>a</sup> Fiat V L. V C :: X M. X K; & connectantur rectæ C B, C A; K D, K E. & quia V B. B A <sup>b</sup> :: X D. D E; erit consequentes bifariando V B. B L :: X D. D M. Item ang V B L = <sup>b</sup> X D M. <sup>c</sup> ergo triacula V B L, X D M similia sunt; <sup>c</sup> & est B V. V L :: D X. X M. ergo cum sit V L. V C <sup>d</sup> :: X M. X K; erit ex æquo V B. V C :: D X. X K. <sup>e</sup> ergo triacula B V C, D X K similia sunt. quare reliqua triacula C B L, X D M etiam similia sunt. Simili discursu patebit triacula C V A, K X E; & triacula C A L, K E M assimilari. <sup>e</sup> quare puncta C, K similiter poni constat. unde cum C <sup>f</sup> sit centrum triaculi B V A, <sup>g</sup> erit K triaculi D X E centrum. Q. E. D.

## Prop. XIII.

Fig 190.

Omnis triaculi (V B A) centrum gravitatis est in recta (V K) qua ab angulo (B V A) in mediam deducta est basin.

Constat hoc aliquatenus è dictis apud Prop. 8. at Archimedeam à neglectis negligere non licet, quam plerique juniores, in hujusmodi materiis, imitantur. Fontes, è quibus posteritas hausit, & exemplaria quæ respexit, imprimis jucundum est contemplari. Sic igitur procedit Auctor noster.

Si negas; esto centrum Z, extra rectam V K; & ab Z ducatur Z Y ad A B parallela. <sup>a</sup> Bifecetur K A continuo, donec segmentum K E minus evadat ipsa Z Y; similique ratione dividatur reliqua semissis K B; tum utrinque per divisionum puncta ducantur rectæ E O, F N, G M, H R, I Q, L P, ad V K parallelæ; connectanturque rectæ P M, Q N, R O (quæ basi B A parallelæ erunt; quia V K. M G <sup>b</sup> :: A K. A G :: B K. B L <sup>b</sup> :: V K. P L; <sup>d</sup> ideoque M G = P L, & simili discursu F N = I H &c). Liquet autem parallelogrammorum L M, P N, Q O centra gravitatis <sup>e</sup> existere in recta V K (eorum quippe

b 4. 6.

c sch. 7. 5.

d 9. 5.

e 9 hujus.

a cor. 1. 10.

quippe bases <sup>f</sup>bisecanti) & proinde totius ex iis compositæ, triangu- <sup>f hyp & sch. 4. 6.</sup>  
lo inscriptæ figuræ, <sup>g</sup>centrum in eadem V K fore; quod sit C; con- <sup>87 cor. 7 huj.</sup>  
nectatur C Z, eique protractæ occurrat A S ad K V parallela. Patet  
autem triangulum V K B ad residua triangula P L B, Q P P, R  $\downarrow$  Q,  
V X R, \*simul sumpta se habere sicut K B ad K H, (nam ductâ V H, \* <sup>12. 6.</sup>  
triangulum V K H triangulis P L B, Q P P, R  $\downarrow$  Q, V X R æqua-  
tur; quoniam altitudo illius horum <sup>g</sup>altitudinibus simul sumptis, & <sup>g 2. 6. & 12. 5.</sup>  
basis ejus horum singulæ basi æquatur; estque triang V K B. V K H  
<sup>h</sup>:: K B. K H. Item simili de causa patet triang V K A ad triangula <sup>h 1. 6.</sup>  
M G A, V X O, & reliqua ex ista parte, se habere sicut K A ad K E  
(vel K B ad K H). \*ergo junctim totum triangulum B V A se habet  
ad ista cuncta residua triangula, sicut K A ad K E, <sup>k 2. 6.</sup> hoc est ut C S ad  
C D; <sup>l 8. 5.</sup> hoc est in majori ratione quàm C S ad C Z. quare dividendo  
habebit figura dictis parallelogrammis constans ad residua cuncta tri-  
angula majorem rationem quàm Z S ad Z C; sit ergo summa paral-  
lelogrammorum istorum ad dictam summam triangulorum, ut Z T  
ad Z C; ergo cum sit Z T. Z C  $\leftarrow$  Z S. Z C. <sup>m 10. 5.</sup> erit Z T  $\leftarrow$  Z S.  
quia verò Z est centrum gr. totius trianguli B V A, & C centrum di-  
ctæ summæ parallelogrammorum, & se reciprocè habet Z T ad  
Z C, ut summa parallelogrammorum ad residuam ex toto B V A sum-  
mam triangulorum; <sup>n 8 hujus.</sup> erit T centrum gravitatis dictæ residuæ trian-  
gulorum summæ; quod fieri sanè <sup>o 9 post hujus.</sup> nequit; quoniam T ad unas hu-  
jus compositæ magnitudinis partes, & extra totum triangulum B V A  
positum ostendebatur. Itaque potius trianguli centrum est in recta  
V K. Q. E. D.

*Aliter.*

Si fieri potest, esto centrum extra V K ad Z; connectantur Z V,  
Z B, Z A; & K R, K S bisecent ipsas V A, V B (unde patet K R V S  
esse parallelogrammum) item ducantur R T, S X ad V Z parallelæ,  
& connectantur S R X T, Z K, M N. Hinc cum sit B Z. B X <sup>a 4. 6.</sup> :: B V.  
B S <sup>b conf. & 15. 5.</sup> :: B A. B K <sup>c 7. 5.</sup> :: A B. A K <sup>d 2. 6.</sup> :: A V. A R <sup>e 7. post. huj.</sup> :: A Z. A T; <sup>f hyp.</sup> liquet  
S R, B A, X T, parallelas esse; & <sup>g 6 post. huj.</sup> K X, A Z, <sup>h hyp. sch. 4. 6.</sup> & K T, B Z etiam  
esse parallelas. Igitur in similibus triangulis A R K, B S K, A V B  
puncta T, X, Z similiter poni liquet. ergo cum Z <sup>k 4 hujus.</sup> sit centrum trian-  
guli A V B, <sup>m 10. hujus.</sup> etiam T, X erunt centra triangulorum A R K, B S K.  
ergo punctum N rectam X T <sup>n 6 cor. 7 huj.</sup> bisecans, <sup>grammo</sup> erit centrum è triangulis  
A R K, B S K <sup>1</sup> (æqualibus nempe) compositæ magnitudinis. Pun-  
ctum verò M <sup>1</sup> est centrum parallelogrammi K R V S (diametrorum  
utique intersectio) <sup>1</sup> ergo totius ex istis triangulis, & hoc parallelo-

Fig. 191.

o 33. I.

grammo compositi trianguli V B A centrum erit in recta M N. Est verò M N (parallelogrammi quippe S R T X latera bifecans) ad R T, adeoque ad V Z <sup>o</sup>parallela, quapropter erit punctum Z extra rectam M N. ergo Z non est centrum, contra quam affirmabas.

## Prop. XIV.

Fig. 192.

*Omnis trianguli (B V A) centrum gravitatis est punctum (C) in quo concurrunt rectæ (V K, B E) ab angulis ad media latera ductæ.*

a 13 hujus.  
b 10. ax. I.

<sup>a</sup>Est enim centrum in utraque V K, B E, <sup>b</sup> ergo in communi puncto.

b 3 cor. sch. I.  
pof. hujus.

*Coroll. 1.* Vicissim rectæ ab angulis per centrum bifecant latera. Aliàs enim, quam centrum sit in iis quæ bifecant, plura forent centra; <sup>b</sup>quod fieri nequit.

2. Tres ab angulis rectæ adversa latera bifecantes in uno puncto concurrunt. In centro nempe trianguli.

3. Recta  $CK = \frac{1}{3} V K$ .

c 2. 6.  
d 4. 6.  
e sch. 4. 6.

Nam connexa F E est ad B A <sup>c</sup> parallela; quapropter est C G.  $K C :: C E. B C :: F E. B A :: V G. G K :: 1. 2.$  ergo componendo est  $G K. C K :: 3. 2.$  adeoque  $V K. C K :: 3. 1.$

Hoc corollarium Archimedeis autographis excidisse videtur: nam indemonstratum (opinor) non assumeret auctor; quod facit tamen in proximè sequenti.

## Prop. XV.

Fig. 193.

*Omnis trapezii (B M N A) duo latera (B A, M N) sibi parallela habentis centrum gravitatis (C) est in recta (X K) parallelarum bisectiones conjungentes, sic divisâ, ut pars ejus (X C), terminum habens bisegmentum minoris (M N) parallelarum, ad reliquam partem (C K) hanc habeat rationem, quam habet utraque simul, æqualis duplâ majoris cum minori ad duplâ minoris cum majori parallelarum (X C. C K :: 2 B A + M N. 2 M N + B A).*

a sch. 4. 6.  
b 13 hujus.  
c 8 hujus.  
d 10. 6.

Quod centrum trapezii sit in X K patet; quoniam productis B M, A N ad concursum in V, ducta V K ipsam M N quoque <sup>a</sup> bifecar, adeoque rectæ X K coincidit; & hinc utriusque trianguli V B A, V M N centrum <sup>b</sup> est in V K, <sup>c</sup> adeoque reliqui trapezii B M N A centrum in eadem existit. Porro <sup>d</sup> secetur recta X K trisariam in punctis H, G; per quæ ducantur rectæ O P, Q R ad B A parallelæ; itaque ductis





## DE QUADRATURA PARABOLÆ.

*Archimedes Dositheo Felicitatem.*

CUM audirem obiisse *Cononem*, qui nobis adhuc superstes erat in amicitia, te verò *Cononis* familiarem fuisse, & Geometriæ esse gnarum; illi quidem demortuo indoluimus ceu vero amico, & in Mathematicis planè mirabili; tibi verò protinus destinavimus mittere scribes, ut *Cononi* decreveramus scribere, è Geometricis theorematibus illud, quod antea quidem nemo contemplatus erat, à nobis verò jam perspectum est; primò quidem per mechanica repertum, postea verò Geometricè demonstratum. Eorum sanè, qui priùs Geometrica tractârunt, nonnulli aggressi sunt scribere, ut possibile sit *circulo dato, & circuli dato segmento æquale rectilineum spatium invenire*; nec non postea comprehensum sub \*totius coni sectione, & recta spatium quadrare tentârunt; assumentes quæ nemo facilè concesserit *lemmata*; unde à multis illi damnati sunt hæc non advenisse. Veruntamen qui *parabolæ* segmentum comprehensum quadrare conatus fuerit, anteriorum scimus neminem, quod certè nunc à nobis inventum est; demonstratur enim quòd *omne segmentum comprehensum sub recta, & parabola, sesquitertium est trianguli basin habentis eandem, & altitudinem æqualem cum segmento*; hoc assumpto *lemmate* ad ejus demonstrationem, quòd *inæqualium spatiorum excessus* (quo majus excedit minus) potest ibi sibi met apponi, ut omne propositum finitum spatium exuperet: usurpârunt autem hoc lemma qui priùs extiterunt Geometriæ; etenim *circulos duplicatam inter sese diametrorum rationem* habere demonstrârunt hoc utentes *lemmate*;

\* ellipsis (opimor.)

De sph. & cyl.  
lib. 1. c. 5.

lemmate; & quòd *sphæræ triplicatam inter se rationem habent diametrorum*; quinetiam quòd *omnis pyramis tertia pars est prismatis eandem cum pyramide basin habentis, & altitudinem æqualem*; & quòd *omnis conus subtriplex est cylindri eandem cum cono basin habentis, & æqualem altitudinem*, similiter prædictum lemma sumentes scripserunt. Evenit verò prædictorum theorematum singulis haud secus ac illis quæ absque hoc lemma demonstrata sunt adhibitam esse fidem; perinde etiam in similem fidem adductis iis, quæ nos edidimus. Ejus igitur exscriptas demonstrationes mittimus, primò sicut è mechanicis comperita sunt, postea verò prout etiam per Geometrica demonstrantur, præmittuntur autem & Elementa Conica, quæ ad demonstrationem usum habent. Vale.

---

## Prop. I.

Fig. 194.  
Apol. 46. 1.

Apol. 5. 2.

Si sit parabola  $ABG$ ; sit autem recta  $BD$  parallela diametro, vel ipsa diameter; recta verò  $AG$  parallela illi, quæ coni sectionem hanc contingit ad  $B$ ; erunt  $DA$ ,  $DG$  æquales. Si &  $DA$  æquetur ipsi  $DG$ , parallela. erunt ipsa  $AG$  & ea quæ sectionem contingit ad  $B$ .

## Prop. II.

Apol. 35. 1.

Si sit parabola  $ABG$ ; sit autem recta  $BD$  parallela diametro, vel ipsa diameter; ipsa verò  $ADG$  parallela ei quæ sectionem contingit ad  $B$ ; at recta  $GE$  sectionem contingat in  $G$ ; erunt  $BD$ ,  $BE$  æquales.

## Prop. III.

Apol. 20. 1.

Si sit parabola  $ABG$ ; recta verò  $BD$  diametro parallela, vel ipsa diameter; & ducantur quedam rectæ  $DG$ ,  $ZH$  parallela tangenti parabolam in  $B$ ; erit ut  $BD$  longitudine ad  $BZ$ , ita  $DG$  potentiâ ad  $ZH$ .

Hæc sanè (ait *Archimedes*) demonstrantur in conicis Elementis. — Cæterum ambigi potest, utrum *Archimedes* Elementa citaverit, an ejus Transcriptores, omisiss quas is apposuerat demonstrationibus ad illa nos ablegaverint. Utique de Conicis, quæ *Archimedis* temporibus extabant, Elementis nihil constat: ista saltem apud *Apollonium* jam habentur locis citatis.

## Prop. IV.

Fig. 195.  
Fig. 196.

Sit portio  $ABG$  comprehensa sub recta & parabola; recta verò  $DB$  à medio ipsius  $AG$  parallelo diametro ducatur, aut ipsa sit diameter; & connexa recta  $GB$  producat; quòd si deducatur altera quæpiam  $TZ$  ipsi  $BD$  parallela, secans utramque rectarum  $AG$ ,  $BG$ ; eandem rationem habebit  $ZT$  ad  $TI$  quam  $DA$  ad  $DZ$ .

a 2. 6.  
b 34. 1.  
c 3 hujus.  
d 4. 6.  
e 20. 6.  
f 19. 5.  
g 11. 5.

Nam ducatur  $IK$  ad  $AG$  parallela: estque  $BGq$ .  $BTq^a$ : ( $DGq$ .  $DZq^b$ :  $DGq$ .  $KIq^c$ :  $BD$ .  $BK^d$ :)  $BG$ .  $BF$ . quare  $BG$ ,  $BT$ ,  $BF$  sunt  $\frac{1}{2}$ . Unde  $BG$ .  $BT$ :  $BG \pm BT$ .  $BT \pm BF$ :  $TG$ .  $TF$ .  
 $d$ :  $TZ$ .  $TI$ . est autem  $DG$ .  $DZ$ :  $BG$ .  $BT$ .  $E$  go  $DG$  ( $DA$ ).  
 $DZ$ :  $TZ$ .  $TI$ . Q.E.D.

Prop.



## Prop. V.

Si portio A B G contenta sub recta & parabola; & ab A ducatur diametro parallela Z A; à G verò sectionem tangens in G, nempe G Z: siquidem in trigono Z A G ducatur aliqua (K L) parallela A Z; ducta (K L) in eadem ratione secabitur à parabola, ac A G à ducta; homologa verò erit pars (A K) ipsius A G ad A ducta parti (K H), quæ ad A G. Fig. 197.

Sit D B diameter parabola, & producantur D B E, G B M. Et ob  $DB^2 = B E$ , erit  $K I = I L$ ; item  $K I. I H :: A D. D K$ ; & permutando  $K I. A D :: I H. D K :: K I \pm I H. A D \pm D K :: K H. A K$ . ergo  $2 K I. 2 A D$  (hoc est  $K L. A G$ )  $:: K H. A K^2 :: K L - K H. A G - A K :: H L. K G$ ; permutandòq;  $K H. H L :: A K. K G$ . *Q. E. D.*

Coroll.  $K L. K H :: A G. A K$ .

## Prop. VI.

Intelligatur verò illud (quod & in speculatione proponitur conspiciendum) in (plano) recto ad horizontem, & in linea A B; dein quæ sunt ad easdem partes cum D concipiantur deorsum quæ verò in adversas sursum; triangulum verò B D G sit rectangulum, habens rectum ad B angulum, & latus B G æquale dimidio jugi, videlicet ut æquetur B A ipsi B G; suspendatur verò triangulum ex punctis B, G; suspendatur verò & aliud spatium Z ab altera parte jugi ad A; & æquiponderet spatium Z suspensum ad A trigono B G D, in situ quo jam ponitur: dico spatium Z trigoni B D G tertiam esse partem. Fig. 198.

Sit enim  $B E = \frac{1}{3} B G$ ; ducaturque E C ad B D parallela; itaq; centrum gr. trigoni G B D æst in E C, & hoc suspensum ab E consistet ipsi Z æquiponderans; quare triang. G B D. Z  $b^2 :: (A B. B E :: G B. B E ::) \frac{1}{3} \cdot 1$ . *Q. E. D.*

Conversè. Si  $Z = \frac{1}{3}$  triang. B D G, æquiponderabunt Z, & B D G.

## Prop. VII.

Sit rursus linea A G jugum, mediam verò ipsius sit B; & suspendatur ad B trigonum G D H; sit verò trigonum G D H amblygonium, habens basim D H, altitudinem verò parem dimidio jugi (B G); & suspendatur trigonum G D H ex punctis B, G; spatium verò Z suspensum ad A æquiponderet triangulo G D H sic habenti ut nunc jacet: similiter Fig. 199.

militer de monstrabitur spatium Z tertiam esse partem trigoni G D H.

a conv. 6 huj.  
b 2 cor. 7. de  
de æquip.  
c const.

Nam spatium Z adjiciatur  $E = \frac{1}{3}$  triang BDG; <sup>a</sup> quapropter E æquiponderat trigono BDG; <sup>b</sup> ergo  $Z + E$  æquiponderat toti BHG. quare  $3Z + 3E =$  triang BHG; unde cum  $3E =$  triang BDG; erit  $3Z =$  DHG. Q.E.D.

Prop. VII.

Fig. 200.

Sit jugum A, medium verò ipsius B; & suspendatur ad B trigonum rectangulum GDE, rectum habens angulum E; & suspendatur è jugo secundum GE; spatium verò Z suspendatur ad A, & æquiponderet ipsi GDE sic habenti ut nunc jacet; quam verò rationem habet AB ad BE, hanc habeat trigonum GDE ad spatium C: dico spatium Z trigono GDE minus esse, sed ipso C majus.

a 6 & 7. 1  
æquip.  
b 14. 5.  
c 8. 1. 5.  
d hyp.  
e 10. 5.

Sit trigoni EGD centrum gr. in perpendiculari HF; <sup>a</sup> quare Z triang EGD :: HB. BA. <sup>b</sup> ergo  $Z \supset$  triang EGD. Item HB. BA  $\supset$  EB. BA <sup>d</sup>: C. triang EGD; adeoque Z. EGD.  $\supset$  C. EGD. <sup>c</sup> ergo  $Z \supset$  C.

Prop. IX.

Fig. 201.

Sit rursus jugum quidem AG, medium verò ejus B, trigonum verò GDC amblygonium, basin quidem habens DC, altitudinem verò EG; & appendatur è jugo secundum GE; spatium verò Z dependeat ab A, & æquiponderet trigono GDC, sic habenti ut modò ponitur; quam vero rationem habet AB ad BE, hanc habeat trigonum GDC ad L: dico ipsum Z majus quidem esse ipso L, minus verò ipso GDC.

Demonstratur ut præcedens.

Prop. X.

Fig. 202.

Sit rursus ABG quidem jugum, & medium ejus B; trapezium verò BDCH, angulos quidem ad puncta B, H rectos habens, latus verò CD inclinans versus G; & quam habet rationem AB ad BH, hanc habeat trapezium BDCH ad L; suspensum verò sit trapezium BDCH è jugo ad BH; item suspendatur spatium Z ad A, & æquiponderet trapezio BDCH, ita se habenti ut jacet: dico spatium Z minus esse ipso L.

Nam

Nam sit centrum trapezii B D C H in recta E F ad A G perpen-  
diculari: estque trap B D C H. Z ( $\therefore$   $^b$  A B. B E)  $\hookrightarrow$  (A B. B H  $^d$ .)  
trap B D C H. L.  $\therefore$  ergo Z  $\hookrightarrow$  L. Q. E. D.

a 15. 1 equip.  
b 6 & 7 equip.  
c 8. 5.  
d hyp.  
e 10. 5.

## Prop. XI.

Sit rursus jugum quidem A G, & medium ipsius B; sit verò tra-  
pezium C D T R habens quidem latera C D, T R tendentia ad G, sed  
ipsa D R, T C perpendicularia ad B G; & cadat D R in B; quam  
verò rationem habet A B ad B H, hanc habeat trapezium C D T R ad  
L; trapezium verò C D T R suspendatur ex jugo ad B H; & Z ex A;  
ac aequiponderet Z trapezio C D T R, sic habenti ut modò jacet: si-  
militer ac priùs demonstrabitur spatium Z minus ipso L.

Fig. 203.

Imò planè similiter ac priùs; quid ergo plura?

## Prop. XII.

Sit rursus jugum quidem A G, medium verò ejus B; sit verò tra-  
pezium D E H C, ad puncta quidem E, H rectos habens angulos, latera  
verò C D, E H vergentia ad G; & quam quidem rationem habet  
A B ad B H, hanc habeat trapezium D E H C ad M; quam verò ra-  
tionem habet A B ad B E, hanc habeat trapezium B E H C ad L; sus-  
pendatur verò trapezium D E H C è jugo ad E H; spatium verò Z  
suspendatur ex A, & aequiponderet trapezio ita se habenti, ut nunc sub-  
jicitur: dico Z majus esse ipso L, minus verò ipso M.

Fig. 204.

\*Sit enim trapezii D E H C centrum gr in K N ad E D parallela; hinc trap D E H C. Z ( $\therefore$   $^b$  A B. B K)  $\hookrightarrow$  (A B. B E  $^d$ .) trap D E H C. L;  $\therefore$  quare Z  $\hookrightarrow$  L. Item trap D E H C. M ( $^d$   $\therefore$  A B. B H)  $\hookrightarrow$  (A B. B K  $^b$ .) trap D E H C. Z; unde Z  $\hookrightarrow$  M. Quæ E. D.

a 15. 1 equip.  
b 6 & 7. 1 a-  
c 8. 5. (quip.  
d hyp.  
e 10. 5.

## Prop. XIII.

Sit rursus jugum quidem A G, & medium ejus B, trapezium verò  
C D T R, ita ut latera C D, T R vergant ad G; sed D T, C R per-  
pendicularia sint ad B G; suspendatur verò è jugo ad E H; spatium  
verò Z suspendatur ex A, & aequiponderet trapezio C D T R sic ha-  
benti ut nunc ponitur; & quam quidem habet rationem A B ad B E,  
illam habeat trapezium C D T R ad spatium L; quam verò rationem  
A B

Fig. 205.

habet  $AB$  ad  $BH$ , hanc habeat idem trapezium ad  $M$ : plane similiter ac in precedenti ostendetur  $Z$  majus quidem quam  $L$ , minus verò ipsò  $M$ .

Demonstratur prorsus ut proximè antecedens.

Prop. XIV.

Fig. 206.

Sit portio  $BKG$  comprehensa sub recta, & parabola; sit verò primùm  $BG$  ad rectos diametro, ducaturque à puncto  $B$  diametro parallela  $BD$ ; à  $G$  verò ipsa  $GD$  tangens parabolam in  $G$ ; enimverò erit  $BGD$  triangulum rectangulum; dividatur autem  $BG$  in quotcunque partes  $BE, EZ, ZH, HI$ , & à sectionibus ascantur diametro parallelae  $ES, ZT, HV, IX$ ; à punctis verò  $(F, K, P, O)$  ad quae ipsae secant parabolam, conjungantur rectae ad  $G$ , & producantur: dico triangulum  $BGD$  trapeziorum quidem  $CE, LZ, MH, NI$ , & trigoni  $XIG$  minus esse quam triplum; trapeziorum verò  $ZF, HK, IF$ , & trianguli  $IOG$  majus esse quam triplum.

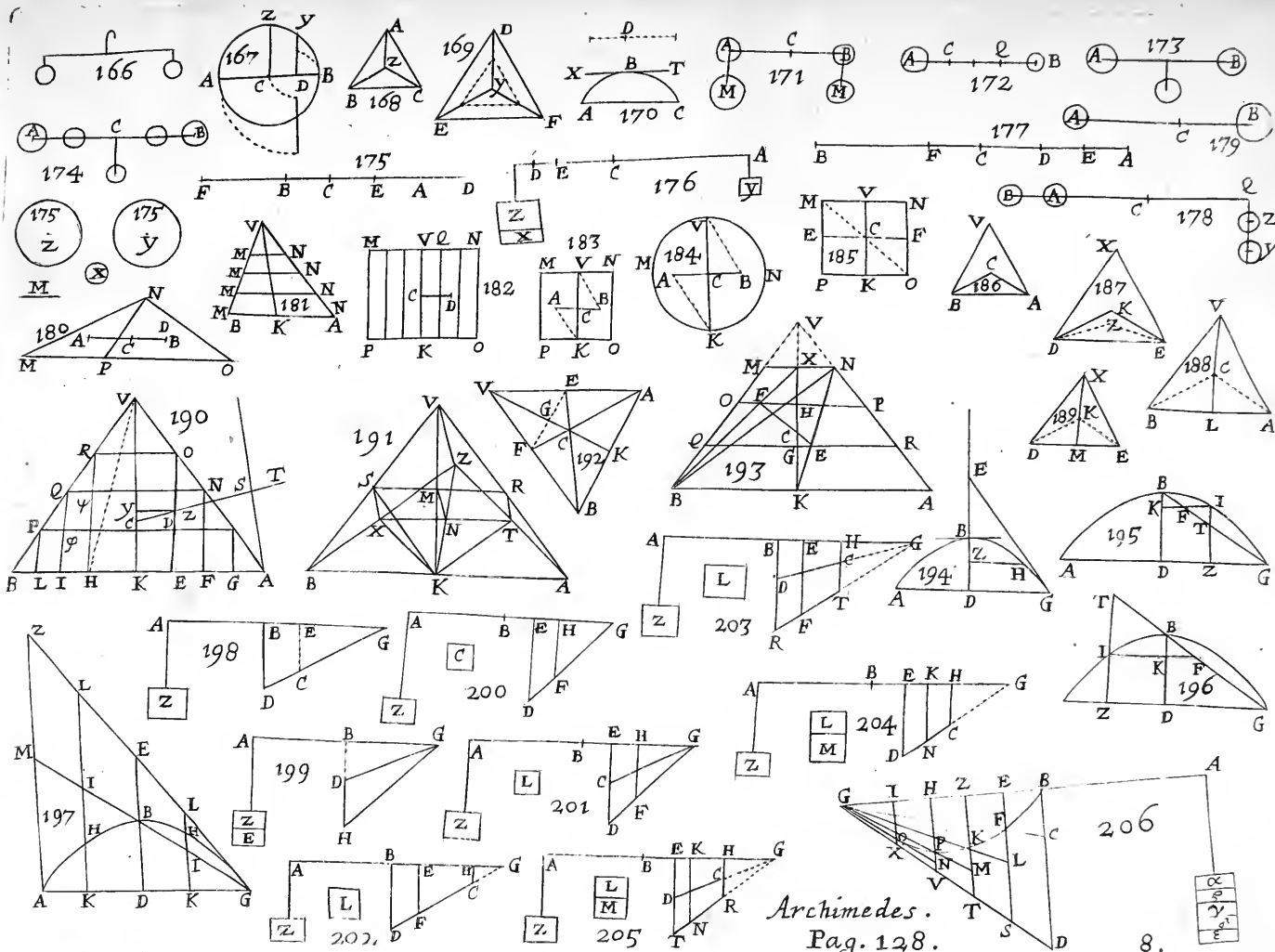
Sit  $AB = BG$ , & ab  $A$  suspendantur  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon$  æquiponderantia trapezii  $DE, SZ, TH, VI$ , & trigono  $XIG$ , singula singulis, & cuncta proinde cunctis simul. Est verò  $GB. (AB). BE^b :: ES. EF^c ::$  triang  $ESG. EFG$ . Item  $ES. EF^* :: BD. BC^c ::$  triang  $BDG. BCG$ . <sup>a</sup>quare  $BDG. BCG :: ESG. EFG^c :: BDG - ESG. BCG - EFG$  (hoc est)  $::$  trap  $DE. CE$ ; <sup>e</sup> ergo trap  $CE \sqsubset \alpha$ . Simili discursu est  $AB. BZ ::$  trap  $SZ. LZ$ ; <sup>f</sup> ac inde ttrap  $LZ \sqsubset \epsilon$ , &  $AB. BH ::$  trap  $TH. MH$ ; <sup>f</sup> ideoque trap  $MH \sqsubset \gamma$ ; item  $AB. BI ::$  trap  $VI. NI$ , atque idcirco trap  $NI \sqsubset \delta$ ; ac denique  $AB. BI ::$  triang  $XIG. OIG$ ; & proinde triang  $XIG \sqsubset \epsilon$ ; quare junctim  $CE \vdash LZ \vdash MH \vdash NI \vdash XIG \sqsubset \alpha \vdash \epsilon \vdash \gamma \vdash \delta \vdash \epsilon$ . Porro quoniam trap  $SZ. FZ^h :: SE. FE^b :: AB. BE$ ; <sup>f</sup> erit trap  $FZ \sqsubset \epsilon$ , similiterque trap  $KH \sqsubset \gamma$ , & trap  $PI \sqsubset \delta$ , & triang  $OIG \sqsubset \epsilon$ ; ac denique trap  $FZ \vdash KH \vdash PI \vdash OIG \sqsubset \epsilon \vdash \gamma \vdash \delta \vdash \epsilon$ : cum itaque <sup>k</sup> sit  $\alpha \vdash \epsilon \vdash \gamma \vdash \delta \vdash \epsilon =$  triang  $D BG$ , liquet propositum.

3

Prop. XV.

Fig. 207.

Sit rursus portio  $BKG$  comprehensa sub recta, & parabola, verùm  $BG$  non sit diametro normalis; est autem necesse vel illam quæ à puncto  $B$  diametro parallela ducitur ad easdem partes sectioni, vel istam qua



Archimedes.  
Pag. 128.



quæ à G, obtusum facere angulum ad B G ; obtusum angulum faciat quæ ad B, & à B ducatur diametro parallela B D ; & à G ipsa G D parabolam contingens in G, & dividatur B G in quocunque partes B E, E Z, Z H, A I, I G ; & ab E, Z, H, I ducantur diametro parallela E S, Z T, H V, I X, & à punctis quibus hæ secant parabolam jungantur rectæ ad G, & extendantur : enimverò & nunc dico triangulum B D G trapeziorum quidem C E, L Z, M H, N I, & trianguli X I G minus esse quàm triplum ; ipsorum verò Z F, H K, I P, & trianguli G O I majus esse quàm triplum.

Eadem prorsus est demonstratio quæ præcedentis, nisi quòd hic pro 10 & 12 hujus, adhibentur 11 & 13. quorsum itaque ταυπλοσῆιν.

## Prop. X V I.

Sit rursus portio B X G comprehensa sub recta, & parabola ; & per B quidem ducatur B D parallela diametro, à G verò ipsa G D tangens parabolam in G, sit verò spatium Z tertia pars trigoni B D G : dico portionem B K G æquari spatium Z. Fig. 208.

Si fieri potest, sit primò Z  $\supset$  port B K G. Secetur tum B D in partes æquales B C, C Q, Q R, R Y, Y D, ita ut sit triang B G Z  $\supset$  port B K G—Z ; unde erit Z  $\supset$  port B K G—triang B G Z. jungantur G C, G Q, G R, G Y occurrentes parabolæ punctis F, K, P, O ; per quæ ducantur E S, Z T, H V, I X ad B D parallelæ. (Liquet verò ipsas B E, E Z, Z H, H I, I G etiam æquari ; \* ob DC. CB :: S F. F E<sup>2</sup> :: G E. E B ; & D Q. Q B<sup>2</sup> :: T K. K Z<sup>2</sup> :: G Z. Z B &c.) \* cor. 4. 6.  
a 4 hujus.

Quia verò B C = C Q, \*erit E F = F L ; <sup>b</sup>unde trap F Z = trap F K ; item ob Z  $\phi$  \* = K M, <sup>b</sup>erit trap  $\phi$  H = trap K P ; pariterque trap  $\psi$  I = trap P O, & triang I G X <sup>b</sup> = triang O G X, ergo triang B G C = trap B F  $\vdash$  F K  $\vdash$  K P  $\vdash$  P O  $\vdash$  triang O G K. ergo Z ( $\frac{1}{3}$  triang B D G)  $\supset$  (port B K G — : trap B F  $\vdash$  F K  $\vdash$  K P  $\vdash$  triang O G X  $\supset$ ) trap F Z  $\vdash$  K H  $\vdash$  P I  $\vdash$  triang O I G ; contra 14 vel 15 hujus. b 37. 1. & 2 a. 1.

Sin dicatur Z  $\supset$  port B K G, sit triang B G C  $\supset$  Z—port B K G ; unde portio B K G  $\vdash$  triang B G C  $\supset$  Z, hoc est port B K G  $\vdash$  trap B F  $\vdash$  F K  $\vdash$  K P  $\vdash$  P O  $\vdash$  triang O G X  $\supset$   $\frac{1}{3}$  triang B D G, ergo fortius erit trap C E  $\vdash$  L Z  $\vdash$  M H  $\vdash$  N I  $\vdash$  triang X I G  $\supset$   $\frac{1}{3}$  triang B D G ; iidem contra 14 aut 15 hujus.

Quin itaque potius erit  $Z = \text{port } BKG$ . *Q.E.D.*

*Prop. XVII.*

Fig. 209. *Hoc demonstrato, liquet quod omnis portio (ABC), comprehensa sub recta, & parabola, sesquitertia est trianguli (ABC) habentis basin eandem cum portione, & altitudinem æqualem.*

a 2 hujus.  
b 1. 6.  
c 20. 6.  
d 16 hujus.

Ducatur tangens CF, cui occurrat diameter DB in E, eique parallela AF; & ob  $DB^a = BE$ ,  $^b$ erit triang  $DEC$  ( $^c$ id est  $\frac{1}{4}$  triang  $AFC$ ) = 2 triang  $DBC$   $^b$  = triang  $ABC$ . atqui  $^d$  est port  $ABC = \frac{1}{3}$  triang  $AFC$ ; ergo triang  $ABC$  port.  $ABC :: \frac{1}{4} : \frac{1}{3} :: 3. 4 :: 1. 1\frac{1}{3}$ . *Q.E.D.*

Hoc quod artificio quasi mechanico sic adstruxerat, dehinc methodo prorsus Geometrica demonstratum exhibebit.

*Definitiones*

Portionum sub recta & curva comprehensarum

1. Basin quidem appello rectam istam;
2. Altitudinem verò maximam perpendicularem à curva linea demissam in basin portionis;
3. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

*Prop. XVIII.*

Fig. 210. *Si in portione (ABC), qua continetur sub recta & parabola, à media base ducatur recta (DB) diametro parallela; vertex erit portionis punctum (B), in quo ducta diametro parallela (DB) secat parabolam.*

a 1 hujus.  
b 2 def. ad 17.  
hujus.

Recta EF contingat parabolam in B, & demittatur BG ad AC perpendicularis; & quia EF est  $^a$ parallela basi AC, liquet BG esse maximam perpendicularem earum quæ à sectione duci possunt in AC; &  $^b$ proinde B fore verticem portionis ABC. *Q.E.D.*

*Prop. XIX.*

Fig 211. *Si in portionem (ABC) comprehensam sub recta & parabola ducantur due rectæ (DB, FE) parallela diametro, illa quidem (DB) à media base, hæc verò (FE) à media dimidia; erit ducta à media base*



base (D B) ducta à mediâ dimidia (F E) sesquitercia longitudine.

Nam ducatur (E G) parallela basi A C; & quia B D. B G<sup>a</sup> :: D Aq. G E q<sup>b</sup> :: D Aq. D F q<sup>c</sup> :: 4. 1, erit<sup>d</sup> convertendo B D. G D<sup>e</sup> (E F) :: 4. 3 :: 1 $\frac{1}{3}$ . 1. Q. E. D.

a 3 hujus.  
b 34. 1.  
c 20 hujus.  
d cor. 19. 5.

Cor. B D. B G :: 4. 1.

Prop. XX.

Si portioni (A B C) comprehensa sub recta & parabola inscribatur triangulum (A B C) eandem basin habens cum portione, eandemque altitudinem, majus erit inscriptum (A B C) quàm dimidium portionis. Fig. 212.

Per verticem B ducatur tangens E F (aquæ basi est parallela), cui occurrant A E, C F diametro parallelæ; liquetque pgr A E F C<sup>b</sup> (hoc est 2 triang A B C) majus esse portione A B C.

a 1 hujus.  
b 41. 1.

Coroll. Hinc, liquet, quòd huic portioni possibile est polygonum inscribere, ita ut reliætæ portiones minores sint omni proposito spatio.

Nam si portionibus A G B, C H B inscribantur triangula, hæc auferent plusquam semisses portionum A H B, C H B; & si in reliquis id fiat, idem contingeret.quare tandem ad reliquias dato spatio minores perveniatur necesse est.

a 20 hujus.  
b 1. 10.

Prop. XXI.

Si portioni (A B C) comprehensa sub recta & parabola inscribatur triangulum (A B C) eandem basin habens cum portione; eandemque altitudinem; inscribantur verò & alia triangula (A H B, C F B) relictis portionibus (A H B, C F B), easdem bases habentia cum portionibus, eandemque altitudinem; singulorum triangulorum (A H B, C F B) relictis portionibus inscriptum octuplum est triangulum (A B C) toti portioni inscriptum. Fig. 213.

Nam quia G I. D B<sup>a</sup> :: A I. A B<sup>b</sup> :: 2. 4; & D B. G H<sup>c</sup> :: 4. 3; a 4. 6. erit ex æquo G I. G H :: 2. 3; adeoque G I = 2 I H; quare tri- b const.  
ang I A G = 2 triang H A I; ideoque triang B A D<sup>c</sup> (+ I A G) c 19. hujus.  
= 8 triang I A H. quare triang A B C (2 B A D) = 8 triang d 1. 6.  
A H B. Q. E. D. e 20. 6.  
f 15. 5.

Coroll. Triang A H B + C F B =  $\frac{1}{4}$  triang A B C.

S 2

Prop.

## Prop. XXII.

Fig. 214.

Si sit portio (ABC) comprehensa sub recta & parabola, & spatia ponantur quotcumque (X, Y, Z) deinceps in quadrupla ratione; sit verò spatiorum maximum (X) æquale triangulo (ABC) basin habenti eandem cum portione, & altitudinem eandem; simul omnia spatia minora erunt portione (ABC).

Portionibus AHB, CFB inscribantur trigona AHB, CFB portionibus istis æquæ alta; & altera pari modo reliquis portionibus APH, COF; HMB, FNB; constâtque fore triang AHB  $\perp$  CFB<sup>a</sup> =  $\frac{1}{4}$  triang ABC<sup>b</sup> =  $\frac{1}{4}$  X = <sup>b</sup>Y; item pariter fore triang APH  $\perp$  HMB<sup>a</sup> =  $\frac{1}{4}$  AHB; & triang COF  $\perp$  FNB<sup>a</sup> =  $\frac{1}{4}$  CFB; cædèoque triang APH  $\perp$  HMB  $\perp$  COF  $\perp$  FNB =  $\frac{1}{4}$  AHB +  $\frac{1}{4}$  CFB<sup>d</sup> =  $\frac{1}{4}$  Y<sup>b</sup> = Z: ergo quum ista trigona simul omnia deficient à portione ABC, erunt simul X, Y, Z eadem minora.

a cor. 21 huj.

b hyp.

c 12. 5.

d 15. 5.

## Prop. XXIII.

D. C. B. A.

64. 15. 4. 1.

Si componantur magnitudines (D, C, B, A) deinceps in quadrupla ratione; omnes magnitudines, insuperque minime (A) pars tertia eadem summa adjecta, erunt sesquitertie maxime (D).

a hyp.

Nam quia  $D^a = 4C$ , erit  $\frac{1}{3}D = \frac{4}{3}C = C \perp \frac{1}{3}C$ ; similiterque  $\frac{1}{3}C = B \perp \frac{1}{3}B$ ; &  $\frac{1}{3}B = A \perp \frac{1}{3}A$ ; est ergo  $\frac{1}{3}D = C \perp B \perp \frac{1}{3}B = C \perp B \perp A \perp \frac{1}{3}A$ ; quare  $D \perp C \perp B \perp A \perp \frac{1}{3}A$ .  $D :: 1 \perp \frac{1}{3}, 1$ . Q.E.D.

Coroll. Hinc, figura portioni inscripta (juxta 22 hujus) minor est quam  $\frac{4}{3}$  trigoni ABC.

Fit enim (ibidem) è magnitudinibus X, Y, Z  $\div \div$  in ratione 4 ad 1, quarum maxima X æquatur triangulo ABC.

## Scholium.

Liquidius id deducatur ex hac universali propositione.

Sint quotcumque quanta proportionaliter decrescentia in ratione  $\alpha$  ad  $\epsilon$ ; eorum sit extremum  $\omega$ , & summa dicatur Z; erit  $Z =$

$$\frac{\alpha\omega - \epsilon\omega}{\alpha - \epsilon}.$$

Nam

Nam ut primum ad secundum, \* ita sunt omnia antecedentia ad \* 12. 5.  
omnia consequentia, hoc est  $a, \epsilon :: Z - \omega. Z - a$ ; quare (extrema &  
media in se ducendo) est  $z Z - a a = \epsilon Z - \epsilon \omega$ ; & (transponendo)  
 $a Z - \epsilon Z = a z - \epsilon \omega$ ; & (dividendo utrinque per  $a - \epsilon$ ) est  $Z =$   
 $\frac{a z - \epsilon \omega}{a - \epsilon}$ .

Hinc si  $a, \epsilon :: 4. 1$ ; erit  $Z = \frac{4a - \omega}{a}$ ; ut in hac prop. 23.

Adnotetur autem, quòd si progressio continuetur ad infinitum,  
scilicet ut  $\omega$  sit  $= 0$  nihil; tunc evanescente termino  $\epsilon \omega$ , liquet fore

$$Z = \frac{a a}{a - \epsilon}.$$

Hinc si  $a, \epsilon :: 4. 1$ ; erit  $Z = \frac{4}{3} a$ .

Hinc autem brevissimè constat Archimideæ quadratura; unaque  
plures innumeræ similiter eliciantur.

### Prop. XXIV.

*Omnis portio (A B C) comprehensa sub recta & parabola, sesqui-* Fig. 214.  
*tertia est trianguli (A B C) eandem basin habentis cum ipsa, & alti-*  
*tudinem aequalem*

Sit  $Z = \frac{4}{3}$  triang A B C; & si fieri potest, sit primò port A B C  
 $\supset Z$ : <sup>a cor. 20 huj.</sup> inscribatur portioni figura A P H M B N F O C trigonis  
constans, (ut in præcedentibus) ac ita ut sit port A B C  $\supset$  fig <sup>b cor. 23 huj.</sup>  
A P H M B N F O C  $\supset$  port A B C  $\supset Z$ ; est ergo  $Z \supset$  fig A P H  
M B N F O C; <sup>b</sup> hæc autem figura minor est quàm  $\frac{4}{3}$  triang A B C;  
ergo magis  $Z \supset \frac{4}{3}$  triang A B C, contra hypothefin.

Sit jam port A B C  $\supset Z$ ; & concipiatur series magnitudinum  
(quarum summa vocetur S) progrediens in quadrupla ratione, (in-  
cipiens utique à triangulo A B C, & decrescens in  $\omega$ ) ita ut sit  $\omega \supset$  c cor. 20. huj.

$Z \supset$  port A B C: cum igitur sit  $S + \frac{\omega}{3} = Z$ ; erit  $\omega \supset S + \frac{\omega}{3}$  d 23 hujus.  
 $\supset$  port A B C; unde liquebit esse portionem A B C  $\supset S$ . <sup>c</sup> Quod e 22 huj.  
est absurdum.

Quare potius est port A B C  $= Z = \frac{4}{3}$  triang A B C.

Coroll.

Coroll.

Hinc

a 41. 1.  
b 24 *bujus*.

1. Si ductâ F G per B ad A C parallelâ compleatur parallelogrammum A G ; erit pgr. A G. port. A B C :: 3. 2. Nam pgr A G. triang A B C <sup>a</sup>:: 6. 3 ; & triang A B C. port A B C <sup>b</sup>:: 3. 4. quare ex æquo pgr A G. port A B C :: 6. 4 :: 3. 2.

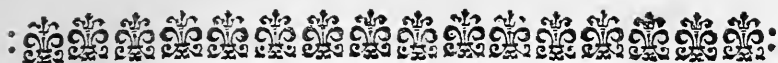
2. Complementum A Y B F est  $\frac{1}{2}$  femiportionis A B D.

3. Hinc facîle efficitur quadratum æquale portioni. Nam producatur D B in E, ut sit B E =  $\frac{1}{3}$  B D ; vel E D =  $\frac{2}{3}$  B D ; & connectantur E A, E C ; liquet trigonum A E C æquari portioni A B C ; unde si \* fiat trigono A E C æquale quadratum, liquet factum esse.

4. Itaque facîle ad datam rectam applicatur parabolica portio ad illam scilicet applicato triangulo A E C.

\* 14. 2.

DE



# De ÆQUIPONDERANTIBUS,

## LIBER SECUNDUS.

### Prop. I.

**S***I* duo sint spatia (AB, CD) contenta sub recta, & parabola, Fig. 216.  
 \*quam possumus ad datam rectam applicare; ex utroque ipsorum <sup>\*cor. 24. de qu.</sup>  
 compositi magnitudinis centrum gravitatis (H) erit in recta connecten- <sup>parab.</sup>  
 te ipsorum centra gravitatis (E, F), dividens dictam rectam (E, F),  
 ut ipsius partes (EH, FH) reciproce eandem rationem habeant cum  
 spatiis (AB, CD).

Accipe FG, FK pares ipsi EH (unde EG = FH), & fiat EL <sup>a 3. ax. 1.</sup>  
 = EG (FH). ad GL applicentur pgr<sup>a</sup> G O, GP <sup>b cor. 24. de qu.</sup> utrumvis æqua- <sup>parab.</sup>  
 le dimidio AB, & productis OR, PQ compleatur pgr QM. Estque <sup>c 6 & 7. 1 de</sup>  
 parab CD. parab AB <sup>c</sup>:: EH. FH <sup>d</sup>:: 2EH (<sup>e</sup> 2GF). 2FH (2EG) <sup>æquip.</sup>  
 :: GK. GL <sup>f</sup>:: QN. QP <sup>g</sup>:: pgr QM. QO <sup>e</sup> (parab AB) <sup>h</sup> unde <sup>d 15. 5.</sup>  
 parab CD = pgr QM. Cum igitur <sup>e</sup> sit E centrum pgr<sup>i</sup> QO, & F <sup>e const.</sup>  
 centrum pgr<sup>i</sup> QM (<sup>o</sup> ob EG = EL, & FG = FK) sitque QM. <sup>f 34. 1.</sup>  
 QO :: EH. FH; liquet propositum. <sup>g 1. 6.</sup>  
<sup>h 14. 5.</sup>  
<sup>k 9. 1 de æquip.</sup>

### Manifestum,

*Si* portioni (ABC) sub recta, & parabola contentum, inscribatur Fig. 217.  
 triangulum (ABC), eandem basim habens cum portione, & æqualem  
 altitudinem; & rursus reliquis portionibus inscribantur triangula  
 (AEB, CFB) easdem bases habentia cum portionibus, & æqualem  
 altitudinem; & semper reliquis portionibus triangula inscribantur eo-  
 dem modo (AME, ESB, CNF, FTB &c); orta figura (AME  
 SBT FNC) portioni evidenter\* inscribi dicatur. Liquet verò, quòd <sup>\*Notabiliter,</sup>  
 sic inscripta figura angulos connectentes (ST, EF, MN), quaque pro- <sup>2 vocaturos.</sup>  
 xime sunt à vertice portionis (B), quaque deinceps parallela erunt por-  
 tionis basi (AC), & bisecabuntur à portionis diametro (BD); &  
 diametros secabunt in rationes numerorum deinceps imparium, uno dicto  
 illà (BY) que ad verticem portionis.

\* *Librum in-* Hoc demonstrandum est in \*Ordinibus.  
*nuit, cui inscriptum τῶς εἰς, (Ordines vel Series), de quo nihil admodum constat.*

a 1 de qu. par. Nam (ductis MP, EH, NR, FL diametro parallelis) erit AG =  
 b 4. 6. GB; & <sup>b</sup>ideo AH = HL; <sup>a</sup>similitérque AI = IE, ac <sup>b</sup>ideo  
 c 15. 5. & 7. 5. AP = PH; & sic porro AD in partes æquales dividetur, & pari-  
 d 11. 5. ter CD in totidem æquales; unde AP = CR. Cum igitur sit  
 e 14. 5. AP.PO<sup>b</sup>::AD.DB<sup>b</sup>::CD.DB::CR.RQ<sup>d</sup>::AP.PO.<sup>c</sup>Erit RQ = PO.  
 f 4 de qu par. item PO.OM<sup>f</sup>::DC.DP<sup>e</sup>::AD.DR<sup>f</sup>::RQ.QN<sup>d</sup>::PO.  
 g 2 ax. 1. OM, <sup>c</sup>quare QN = OM, <sup>g</sup>itaque RN = PM, <sup>h</sup>& MN ipsi AC  
 h 33. 1. parallela est. Simili discursu EF, & ST ipsi AC parallelæ osten-  
 k cor. 19. de quad. parab. dentur; unde MV = VN, & EX = XF &c. Denique BD. BX  
<sup>k</sup>::4. 1. Et simili modo, BX. BY :: 4. 1; unde si BY ponatur 1,  
 erit YX = 3. (BX = 4, BD = 16, XD vel EH = 12) item  
 HG.DB (<sup>b</sup>AH. AD) :: 8. 16. unde EG = 4: ducatur MZ ad  
 AB parallela, & ob EG. EZ <sup>k</sup>::4. 1; erit ZG(MO) = 3, & OP  
 (<sup>1</sup>/<sub>2</sub> HG) = 4, ergo MP(VD) = 7, & proinde XV(XD—VD)  
 = 5. Ex quibus constat de omnibus. Q.E.D.

- Coroll. 1. EG = FK. unde  
 2. GK prrallela ad EF.  
 3. EG = BX = <sup>1</sup>/<sub>4</sub> BD.

Prop. II.

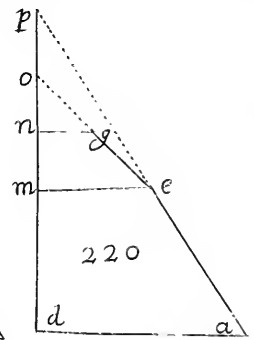
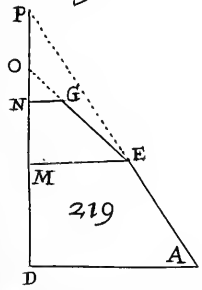
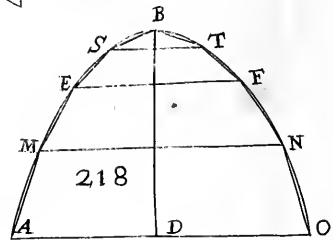
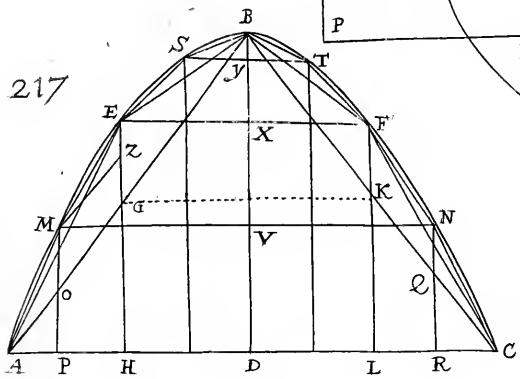
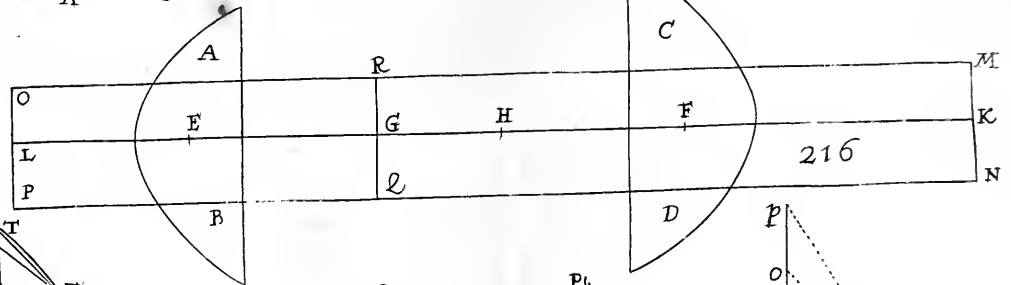
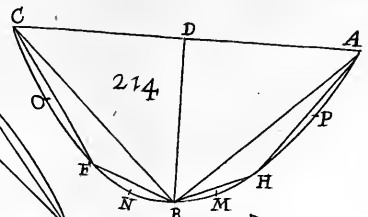
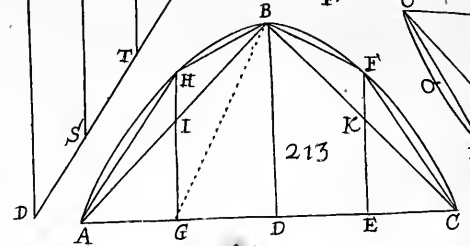
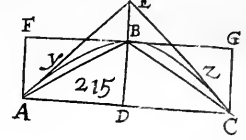
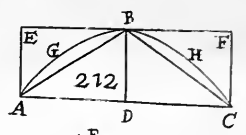
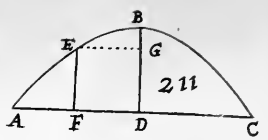
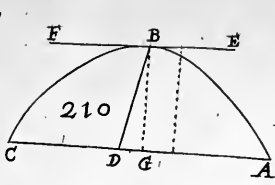
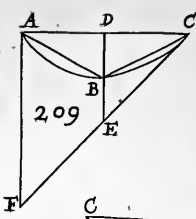
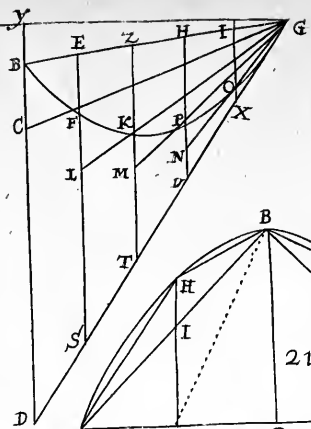
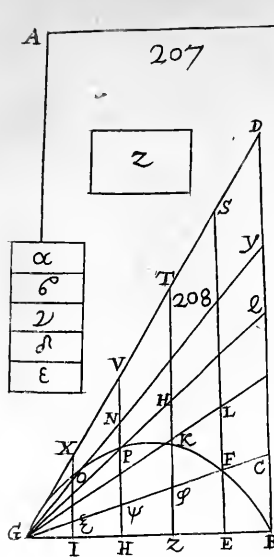
Fig. 218. Si verò portioni (ABC) comprehensa sub recta, & rectanguli co-  
 ni sectione rectilineum (AMESBTFCN) evidenter inscribatur,  
 inscripti centrum gravitatis erit in. portionis diametro (BD).

a lemm. præc. Nam connectantur anguli rectis MN, EF, ST, <sup>a</sup>hæ parallelæ sunt  
 b 15. 5. & 13. 1 de basi AC, & bisecantur à diametro BD; <sup>b</sup>quare trapeziorum AN,  
 c 7 cor. 7. 1 de MF, ET, & trigoni SBT singula centra gravitatis sunt in diametro  
 aequip. BD. ergo & compositi ex his centrum gr. est in eadem. Q.E.D.

Lemma.

Fig. 219. Sint trapezia DE, de, & MG, mg, in quibus DM. MN :: dm.  
 220. mn. & DA. ME :: da me. Atque ME. NG :: me. ng. erit trap.  
 DE. MG :: trap de. mg.

Producantur AEP, EGO, aep, ego, ut occurrant ipsis DN, dn.  
 Estque







Estque P D. P M<sup>a</sup> :: D A. M E<sup>b</sup> :: da. me<sup>a</sup> :: pd. pm<sup>c</sup> :: P D. P M. <sup>a 4. 6.</sup>  
 ergo dividendo P M. M D :: pm. md., <sup>b hyp.</sup> item M D. M N :: m d. m n.  
 ergo ex æquo P M. M N :: pm. mn ; item ob M E. N G<sup>b</sup> :: me. ng ; <sup>c 11. 5.</sup>  
 erit M N. M O :: mn. mo. ergo rursus ex æquo P M. O M :: p m.  
 om ; <sup>d 1. 6.</sup> hoc est triang P M E. O M E :: triang pme. ome. item triang  
 O M E. O N G<sup>c</sup> = M E. N G, bis<sup>b</sup> = me. ng, bis<sup>c</sup> = triang ome. <sup>e 20. 6.</sup>  
 ong ; ergo permutando triang O M E. ome :: triang O N G. ong<sup>f</sup> :  
 trap M G. mg ; & rursus permutando triang O M E. trap M G ::  
 triang ome. trap mg ; ergo ex æquali triang P M E. trap M G ::  
 triang pme. trap mg ; quinimò similiter trap D E. triang P M E ::  
 trap de. triang pme ; ergo denuo ex æquo trap D E. M G :: trap de.  
 mg. Q. E. D.

Coroll. Trap D E. triang O M E<sup>\*</sup> :: trap. de. triang ome. <sup>\* 22. 5.</sup>

Lemma 2.

Si A. B :: D. E. & A. C :: D. E. Erit B. C :: E. F. & A. B + C Fig. 221  
 :: D. E + F.

Nam permutando B. E (A. D) :: C. F. & rursus permutando B. C  
 E. F. Item B + C. E + F<sup>a</sup> :: (B. E ::) A. D. ergo permutando <sup>a 12. 5.</sup>  
 A. B + C :: D. E + F.

Quòd si sit A. B + C :: D. C + F ; & A. B :: D. E. erit B. C ::  
 E. F. & A. C :: D. F. Item si fuerit B. C :: E. F. & A. B + C ::  
 D. E + F. Erit A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Quæ ex simili ra-  
 tionum permutatione, inversione &c. facile eliciuntur.

Prop. III.

Si duarum portionum \*similium (A B C, abc) sub recta, & parabo- Fig. 222  
 la comprehensarum, utrique rectilinem inscribatur evidenter ; habe-  
 ant verò inscripta rectilinea latera muno equalia multitudine, centra \*  
 gravitatum (X, γ) similiter secant diametros portionum (B D, bd). <sup>223. Not.</sup>

Angulos connectant rectæ E F, G H, K L, ef, gh, kl ; sintque Q,  
 R centra trapeziorum A F, E H, & S compositi ex illis A H ; & si-  
 militer q, r, s sint centra ipsorum af, eh, ah : item sit X centrum com-  
 positi ex trapezio G L, & trigono K B L, & x ipsius gl + triang kbl. <sup>a 3 de qu par.</sup>  
 Jam ob A D q. E M q<sup>a</sup> :: B D. B M<sup>b</sup> :: bd. bm :: adq. emq ; erit A D. <sup>b hyp. & manifest.</sup>  
 E M (A C. E F) :: ad. em (ac. ef). <sup>c 15. 5.</sup> ergo 2 A C + E F. 2 E F +  
 A C :: 2 ac + ef. 2 ef + ac. hoc est M Q. Q D :: mq. qd ; ergo <sup>d 15. & 18. 5.</sup>  
 T com.

c 13. 1. *quip.* componendo M D. Q D :: *md. qd.* item B D. M D :: *bd. md.* itaque  
 f 12. 5. ex æquo B D, Q D :: *bd. qd.*; pariterque B D. M q :: *bd. mq.* Simili  
 g 6 & 7 1. *quip.* discursu B D. R M :: *bd. rm.*; square B D. R Q :: *bd. rq.* Item R S.  
 h 1. *lem.* 2. *huj.* S Q :: trap A F. E H :: *af. eh.*; *rs. sq.* ergo ex æquo B D. S Q  
 k 2. *lem.* 2. *huj.* :: *bd. sq.*; & <sup>k</sup> proinde B D. S D :: *bd. sd.* Simili discursu B D. B X  
 l cor. 1. *lem.* 2. *hujus.* :: *bd. bx.*; & proinde B D. X S :: *bd. xs.* Quia verò trap A F. E H  
 :: *af. eh.* erit componendo A H. E H :: *ah. eh.* Item trap E H. G L  
 :: *ah. gl.* & trap G L. triang K B L :: *gl. kbl.* ergo ex æquo A H.  
 G L :: *ah. gl.* & A H. K B L :: *ah. kbl.* & <sup>i</sup> idcirco A H. G L +  
 K B L :: *ah. gl. + kbl.* (<sup>exy. ys.</sup>). & cùm prius fuerit  
 B D. X S :: *bd. xs.*; <sup>k</sup>erit B D. X Y :: *bd. xy.*; <sup>k</sup> ideóque etiam B D.  
 B Y :: *bd. by.*; & B D. Y D :: *bd. yd.* ac denique dividendo B Y. Y D  
 :: *by. yd.* Q.E.D.

*Net.* Portionum similitudinem intelligit hic Author, non stri-  
 ctissimam, at latiore sensu, juxta quem omnia triangula, & omnes fi-  
 guræ Analogicæ (in quibus nempe si diametri à vertice proportiona-  
 liter dividantur, per divisiones ductæ ordinatæ proportionales fiunt)  
 sibimet assimilari dicantur; unde quævis duo parabolica segmenta  
 similia esse supponit hic discursus; id quod probè, quò scrupuli tol-  
 lantur, animadversum oportet.

*Prop. IV.*

Fig. 224.

*Omnis portionis (A B C) comprehensa sub recta, & parabola, cen-  
 trum gravitatis est in portionis diametro (B D).*

Si neges, esto E centrum portionis extra B D; ducatur E F ad B D  
 parallela; sitque C F. F D :: C A. G A :: triang CBA. triang GBA.  
 21. 6. *b' cor.* 20. *de* <sup>b</sup>um portioni inscribatur figura evidens (quæ vocetur X), ita ut port  
*quadr. parab.* A B C — X :: triang G B A. Inscriptæ autem figuræ centrum <sup>e</sup> sit  
 c 2. *hujus.* H, & connexæ H E occurrat C K ad B D parallela. Estque X port  
 d 8. 5. A B C — X <sup>d</sup> :: triang A B C. port A B C — X <sup>d</sup> :: triang A B C.  
 e prius. A B G (c: C F. D E :: K E. H E.) Sit M E. H E :: X. port A B C  
 f 10. 5. — X; quare M E. H E :: K E. H E; & <sup>i</sup> ideo M E :: K E, &  
 g 8. 1. *de æqu.* M <sup>e</sup> centrum reliquarum portionum erit extra sectionem. Q.E.A.  
 h 9. *post. 1. æqu.*

*Coroll.* Hinc si ex tota portione auferatur trigonum A B C,  
<sup>e</sup>centrum reliquarum portionum est in B D, & sic porro, ablatis aliis  
 trigonis figuræ inscriptæ.

*Lemma.*

## Lemma.

Si  $L R . R P \sqsubset L S . S P$  erit  $L R \sqsubset L S$ .

Nam componendo  $L P . R P \sqsubset L P . S P$ .  $\therefore$  ergo  $R P \supset S P$ . & <sup>a 10. §.</sup>  
proinde  $L R \sqsubset L S$ .

Inversè, si  $L R \sqsubset L S$ . erit  $L R . R P \sqsubset L S . S P$ .

Nam  $L R . R P \supset L S . R P \supset L S . S P$ .

b 8. §.

## Prop. V.

Si portioni (ABC) comprehensa sub recta, & parabola, inscribatur *Fig. 225.*  
rectilineum (AEBFC) evidenter, totius portionis centrum gravitatis  
(S) propius est vertici portionis (B), quam inscripti rectilinei centrum  
(R).

Sit P centrum trigoni ABC, & reliquarum portionum AEB,  
CFB centra sint M, N; trigonorum verò AEB; CFB centra  
sint I, K, & connectantur MN, IK, GH; liquet O esse centrum  
port AEB + CFB. (quia hoc est in utraque <sup>a 6 cor. 7. 1. de</sup>  $^a M N, ^b B D$ ), & L  
esse centrum triang AEB + CFB; & quia  $AG = \frac{1}{2} AB$ , & <sup>equip.</sup>  
 $CH = \frac{1}{2} CB$ , <sup>c</sup> erit  $DQ = \frac{1}{2} DB$ ; &  $DP (^d \frac{1}{3} DB) \supset DQ$ ; <sup>b cor. 4. hujus.</sup>  
unde  $DP \supset DQ$  (nam S<sup>a</sup> cadit inter O, P). Simili discursu  $IG \supset MG$ ; <sup>c 2. 6.</sup>  
quare  $LP \supset OP$ : cum itaque sit  $L R . R P \sqsubset L S . S P$ : triang ABC. tri-  
ang AEB + CFB. <sup>d 3 cor. 14. 1. de</sup>  $\sqsubset$  triang ABC. port AEB + CFB  $\sqsubset$  <sup>equip.</sup>  
 $O S . S P \sqsubset L S . S P$ . <sup>e 6 & 7. 1. de</sup>  $\therefore$  erit  $L R \sqsubset L S$ ; quare S est propius ver-  
tici B. *Q. E. D.* <sup>f 8. §.</sup>

Coroll. Similiter, quò figura inscripta plura habet latera, eò cen-  
trum ejus propius ad verticem accedet. <sup>lemm præi.</sup>

## Prop. VI.

Datâ portione (ABC) comprehensa sub recta, & parabola, possibi'e *Fig. 226.*  
est portioni rectilineum (AEBFH) evidenter inscribere, ita ut re-  
cta (SR), quæ est inter centra gravitatum portionis, & inscripti recti-  
linei minor sit quâcumque rectâ propositâ (Z).

Sit B S. Z :: triang ABC. X; & <sup>a</sup> inscribatur figura (AEBFC) <sup>a cor. 20 de</sup>  
evidenter (cujus centrum R), ita ut port ABC — fig AEBFC  $\supset$  X. <sup>qu. par.</sup>  
Dico factum.

Si fieri potest, sit  $S R \sqsubset \} Z$ . estque port ABC. port ABC —

b 8. 5.  
c hyp.

fig A E F B C <sup>b</sup>  $\sqsubset$  triang ABC. X <sup>c</sup> :: B S. Z.  $\sqsubset$  } B S. S R. itaque  
 $\sqsubset$  }  
 si ponatur port ABC. port A B C—fig A E B F C :: T S. S R, erit  
 T S  $\sqsubset$  B S; & T <sup>d</sup> centrum portionum reliquarum demptâ figurâ  
 A E B F C erit extra B D, contra coroll. 4 hujus.

d 8. 1 de aqu.

Brevius. Quò figura inscripta plura habet latera, eò propius accedet ad verticem; proinde ad centrum ferè accedet, ex continuo laterum augmento.

Prop. VII.

Fig. 227.

Fig. 228.

Diuarum similium portionum (ABC, MNO) comprehensarum sub recta, & parabola, centra gravitatum (E, Q) in eâdem ratione secent diametros (BD, NP).

a 6. hujus.

\* Not.

b hyp.

c lemm. ad 4 h.

d 3 hujus.

Si nega, esto B H. H D :: N Q. Q P (ita nempe primò ut H cadat infra E). Portioni A B C <sup>a</sup> inscribatur figura A F B G C, cujus centrum G, ita ut E G  $\sqsupset$  E H; & huic <sup>\*</sup> similis figura inscribatur portioni M N O, cujus centrum sit T; & ob N Q. Q P (<sup>b</sup> :: B H. H D) <sup>c</sup>  $\sqsubset$  (B G. G D <sup>a</sup> ::) N T. T P; <sup>c</sup> erit N Q  $\sqsubset$  N T, contra 5 hujus.

Quòd si dicas esse B K. K D :: N Q. Q P; & K cadere supra E; fiat N X. X P :: B E. E D <sup>c</sup>  $\sqsubset$  B K. K D :: N Q. Q P. <sup>c</sup> ergo N X  $\sqsubset$  N Q; sic relabimur in primam hypothesin, quam absurdum demonstravimus.

Aliter brevius. Cum centra similium figurarum inscriptarum, si laterum numerus augeatur infinitè, in centra portionum definant, & illarum centra proportionaliter dividant diametros, harum centra idem efficient.

\* Not. Similes dicuntur inscriptæ segmentis figuræ, non juxta strictam illam, quæ initio sexti elementi definitur, similitudinem, sed propter similem inscribendi modum, qualis in appposito ad primam hujus manifesto, & in 21<sup>a</sup> de quadr. parab. describitur; quæ certè similitudo huic fundando ratiocinio sufficit. vid Not. ad 3 hujus.

Prop. VIII.

Fig. 229.

Cujuscunque portionis (A B C) sub recta, & parabola contenta centrum gravitatis (H) dividit portionis diametrum (E D), ita ut pars ejus (B H), quæ ad verticem, sesquialtera sit partis (H D) quæ ad basim.

Portioni inscribatur figura evidens A K B L C, & portionum A K B, C L B centra sint M, N; ac E centrum trigoni A B C, ducantur

cantur KL, MN, FG, sitque  $SX = \frac{1}{3} BS = \frac{1}{12} BD$  (ob  $BS^a = \frac{1}{4}$  a *manif. hujus.*  
 $BD$ ). unde  $BX (BS + SX) = \frac{4}{3} BD + \frac{1}{12} BD = \frac{5}{3} BD$ . b 3 *cor. 14 huj.*  
 Item  $ED^b = \frac{1}{3} BD$ ; ergo  $XE = \frac{1}{3} BD$ . Porro ob  $BD = 4KF$  c 7 *hujus.*  
 erit  $BH = (4KM =) 4SQ$ ; ergo (sublatâ  $SQ$ ) est  $BS +$  d *const.*  
 $QH = 3SQ = 3SX(BS) + 3XQ$ ; ergo  $QH = 3XQ$ . at- e 24. *de qu. par.*  
 qui 3. 1. e: triang ABC. port  $AKE + CLB^f$ : QH. HE. ergo f 6, 7. 1 *equ.*  
 $XQ = HE$ ; unde  $XE (BX, \text{vel } DE) = 5HE$ ; &  $XH =$  g 9. 5.  
 $4HE$ , &  $HD = 6HE$ . Liquet igitur fore  $BH. HD :: 9. 6 :: 3. 2$ .  
 Q. E. D.

Coroll.  $BD. HD :: 15. 6 :: 5. 2$   
 $BD. BH :: 15. 9 :: 5. 3$   
 $BD. HE :: 15. 1$

Lemma.

Quotlibet AB, CB, DB, EB  $\div\div$ ; erunt excessus AC, CD, DE etiam  $\div\div$  in eadem ratione. Nam ob  $AB. CB :: CB. DB$ , erit divisim  $AC. CB :: CD. DB$ ; & permutatim  $AC. CD :: CB. DB$ ; item ob  $CB. DB :: DB. EB$ , erit divisim  $CD. DB :: DE. EB$ ; permutandoque  $CD. DE :: DB. EB :: CB. DB$ . unde liquet fore AC, CD, DE  $\div\div$  in ratione CB ad DB, vel AB ad CB.

Coroll.  $AD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB$ , &c. 12, 16, 18, 5.

Prop. IX.

Si quatuor lineæ (AB, CB, DB, EB) proportionales sint in continua proportionem; & quam rationem habet minima ad excessum, quo maxima excedit minimam, hanc habens sumatur aliqua ad tres quintas excessus, quo maxima proportionalium excedit tertiam; quam vero habet rationem æqualis duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ ad æqualem quintuplæ maximæ, & decuplæ secundæ, & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ, hanc habens accipiatur quedam ad excessum, quo maxima proportionalium excedit tertiam; simul ambe sumptæ erunt duæ quintæ ipsius maximæ.

Fig. 23 c<sup>n</sup>

Sit  $EB. AE :: FG. \frac{1}{5} AD$ ; item  $2AB + 4CB + 6DB + 3EB. 5AB + CB + 10DB + 5EB :: GH. AD$ ; dico fore  $AB. FH :: 5. 2$ .

Nomi-

Nominentur  $L = 2AB + 4CB + 6DB + 3EB$   
 $M = 5AB + 10CB + 10DB + 5EB$   
 $Q = 2AB + 4CB + 2DB$   
 $R = 2AB + 4CB + 4DB + 2EB$   
 $S = 2DB + EB$   
 $T = CB + 3DB + 2EB$   
 $V = 2AB + 3CB + DB$   
 $X = AC + 3CD + 2DE$

a cor. lemmis.

præc.

b 15. 5.

c 12. 5.

d prius.

e cor. præc.

f 16, &amp; 15. 5.

g hyp.

Ob  $AB + CB.DB^2 :: AD.DE$ ; berit  $2AB + 2CB.2DB :: (AD.DE^2 ::) CB + DB.EB$ . <sup>c</sup>quare  $V.S :: AD.DE$ : fiat  $AD.DO :: R.S$ ; quare inversè componendo erit  $AO.AD :: R + S.R$ ; (hoc est  $L.R$ ); item  $AD.GH :: M.L$ ; ergo ex æquò perturbatè est  $AO.GH :: M.R$  <sup>b</sup>: 5. 2. Porro, ob  $DO.AD :: S.R$ ; &  $AD.DE^2 :: V.S$ ; erit rursus ex æquo perturbatè  $DO.DE :: V.R$ ; quare inversè convertendo  $T(R - V).R :: OE.DE$ ; item  $AC.CB^c :: DE.EB^c :: CD.DB^c :: 3CD.3DB^c :: 2DE.EB$ ; <sup>c</sup>adeoque  $X.T :: DE.EB$ ; ergo iterum ex æquo perturbatè  $OE.EB :: X.R$ ; componendoque  $OB.EB :: X - R.R$ ; <sup>c</sup>item  $AC + CD.DE :: AB + CB.DB :: CB + DB.EB :: AB + 2CB + DB.DB + EB$ ; ergo inversè componendo  $AE.AD :: AB + 2CB + 2DB + EB$ .  $AB + 2CB + DB^c :: R.Q$ . <sup>f</sup>ergo  $R. \frac{1}{2}Q :: AE. \frac{2}{3}AD^5 :: EB.FG$ ; erat verò prius  $X + R.R :: OB.EB$ ; ergo ex æquo  $OB.FG :: X - R. \frac{1}{2}Q$  (hoc est  $3AB + 3DB + 6CB. \frac{1}{2} :: 2AB + 2DB + 4CB$ ) <sup>b</sup>: 5. 2: atqui fuit  $AO.GH :: 5. 2$ ; quare <sup>c</sup>unctim  $AB.FG :: 5. 2$ .  $Q.E.D.$

Hæc conclusio sic operosè monstrata, poterit ita per operationes Algebraicas expeditius & liquidius ostendi.

Sicut  $a, b, c, d \div$ ; &  $d.a - d :: y. \frac{3a - 3c}{5}$  (quare  $y = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$ ); &  $2a + 4b + 6c + 5d. 5a + 10b + 10c + 5d :: 2a - c$  (quare  $z = \frac{2aa - 1ab - 1ac + 2ad - 4bc - (cc - 3cd)}{5a - 10b - 10c - 5d}$ ).

Est ergo (summas istas conjungendo, fractionesque, quibus constant, ad eandem denominationem redigendo)  $y + z =$

1c ana

$$\begin{array}{r}
 10aaa + 10aab + 20aac + 20aad + 10abd - 20abc (* - 20aad) * ob bc = ad \\
 - 30acc (- 20abd) - 20acd - 10bcd (* (10aad)) * ob cc = \\
 \hline
 25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd \quad bd.
 \end{array}$$

$$= \frac{10aaa + 20aab + 20aac - 20abd - 20acd - 10add}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd} = \frac{2}{5} a. \text{ (quod}$$

patebit, hujus æquationis partem utramque multiplicando per 5, & dividendo per 2, vel multiplicando per crucem). itaque constat.

### Lemma.

In parabola A B C, sint A C, D E ordinatim applicatæ ad diametrum B F; erunt portiones A B C, D B E inter se, ut cubi semibasi- Fig. 231.  
um F A, G D.

Nam, connexis B A, B C, B D, B E; est port A B C. D B E<sup>a</sup> :: triang A B C. D B E<sup>b</sup> :: triang B F A. triang B G D<sup>c</sup> = F A. G D<sup>b</sup> 15. 5.  
+ B F. B G = F A. G D + F A q. G D q<sup>c</sup> = F A cub. G D cub. d 23. 6.  
Q. E. D. d 3. de qu. par. e 5. def. 6.

### Prop. X.

Omnis frusti (A D E C) à parabolico segmento ablati centrum gra- Fig. 231.  
vitatis est in recta (G F), quæ diameter est frusti, hoc modo positum, æquifecta recta (G F) in quinque partes (G L, L H, H K, K P, P F) in media quinta parte (H K); ut ejus particula propior minori basi frusti ad reliquam partem eandem habeat rationem, quam habet solidum, basin quidem habens quadratum quod ex majore basium frusti, altitudinem verò æqualem utrique simul & dupla min. ris basis & majori, ad solidum, basin quidem habens quadratum minoris basis frusti, altitudinem verò æqualem utrique & dupla majoris basis & minori ipsarum.

Dico si fuerit H I. I K :: 2 D E + A C \* A C q. 2 A C + D E \* A I 3, & 11. 6.  
D E q; forè punctum I centrum gr. frusti A D E C. b 12. 6.

Sint F B, Y B, G B, Z B ÷; & fiat F H. I R :: F Z. Z B; est que c 20. 6.  
F B q. Y B q<sup>c</sup> :: F B. G B<sup>a</sup> :: A F q. D G q; unde F B. Y B :: A F. D G. d 3. de qu. par.  
item F B cub. Y B cub<sup>c</sup> (F B. Z B) :: A F cub. D G cub; f: port e 33. 11.  
A B C. D B E; ergo dividendo F Z. Z B (sid est F H. I R) :: frust g const.  
A D E C. D B E. Porro, D E. A C<sup>h</sup> (D G. A F)<sup>k</sup> :: Y B. F B. h 15. 5.  
re D E. A F :: Y B.  $\frac{1}{2}$  F B; & componendo D E + A F. A F :: k prius.  
Y B +  $\frac{1}{2}$  F B.  $\frac{1}{2}$  F B. & D E + A F. A C. m (hoc est, D E + A F l 16, & 15. 5.  
\* A C q. A C cub) Y B +  $\frac{1}{2}$  F B. F B. Item A C cub; D E cub<sup>n</sup> :: m 32. 11.  
F B n prius. et 15. 5.

FB. ZB; dein DE. AC ° (YB. FB) ° :: ZB. GB; ergo D G.  
 AC ::  $\frac{1}{2}$  ZB. GB; componendóque D G. AC + DG ::  $\frac{1}{2}$  ZB.  
 GB +  $\frac{1}{2}$  ZB; unde DE. AC + DG <sup>m</sup> (DE cub. AC + DG  
 \* DEq) :: ZB. GB +  $\frac{1}{2}$  ZB; quapropter ex æquo erit DE + AF  
 \* ACq. AC + DG \* DEq <sup>h</sup> (hoc est 2 DE + AC \* ACq. 2 AC  
 + DE \* DEq; (hoc est HI. IK) :: YB +  $\frac{1}{2}$  FB. GB +  $\frac{1}{2}$  ZB;  
 & componendo HK. IK :: YB +  $\frac{1}{2}$  FB + GB +  $\frac{1}{2}$  ZB. GB  
 +  $\frac{1}{2}$  ZB <sup>h</sup> :: 2 YB + FB + 2 GB + ZB. 2 GB + ZB. unde  
 (antecedentes quintuplicando) FG. IK :: 5 TB + 5 ZB + 10 YB  
 + 10 GB. 2 GB + ZB. Item FG. FK <sup>p</sup> (:: 5. 3.) :: <sup>h</sup> 5 FB +  
 5 ZB + 10 YB + 10 GB. 2 FB + 2 ZB + 4 YB + 4 GB;  
 ergo (jungendo consequentes duarum proportionum (FG. IF ::  
 5 FB + 5 ZB + 10 YB + 10 GB. 2 FB + 3 ZB + 4 YB +  
 6 GB; vel inversè IF. FG :: 2 FB + 4 YB + 6 GB + 3 ZB.  
 5 FB + 10 YB + 10 GB + 5 ZB; Item IR. FH (<sup>p</sup> $\frac{2}{3}$  FG) <sup>s</sup> ::  
 ZB. FZ; ergo RF (IF + IR) =  $\frac{2}{3}$  FB; proindeque BR =  $\frac{2}{3}$   
 FB; adeóque BR. RF :: 3. 2; unde punctum R est centrum  
 gr. portionis ABC: sit Q centrum portionis DBE; itaque BQ.  
 QG :: 3. 2; vel compositè BG. BQ :: 5. 3 :: BF. BR <sup>t</sup> :: FG.  
 QR :: 5. 3 <sup>p</sup> :: FG. FH; unde QR = FH; itaque demum x est  
 QR. IR :: frust ADEC. port DBE; y quare punctum I est cen-  
 trum gr. frusti ADEC. Q.E.D.

e 11. 5.

p hyp.

r 9 hujus.

s 8 hujus.

t 19. 5.

u 9. 5.

x <sup>supr. cum 7.</sup>

y 6, &amp; 7. 1

quip.





# DE INSIDENTIBUS HUMIDO.

## LIB. I.

**T**Ractatus hic injuriâ temporis mutilus evasit, nec Gracæ extat; Latinam versionem perpolivit Federicus ille Commandinus, de literis hisce optimè meritis, quem sequimur  $\chi\tau\ \pi\acute{o}\delta\alpha\varsigma$ . Inscriptionem fuisse  $\epsilon\pi\iota\ \tau\omega\nu\ \epsilon\chi\alpha\upsilon\delta\iota\omega\nu$  discimus ex Strabone; id est de iis quæ vehuntur, gestantur, feruntur, sustinentur, continentur, vel insident Humido; hæc enim omnia significat  $\tau\acute{o}\delta\epsilon\chi\epsilon\iota\delta\epsilon\varsigma$ . Agit verò de Humidi naturâ, figurâ, quatenus admittit corpora, vel attollit, quantâque vi resistit; quo situ in humido consistit, vel movetur portio spheræ, quoque portio conoidis rectanguli, vel parabolici.

### Hypoth. I.

**P**onatur humidi eam esse naturam, ut partibus ipsius æqualiter jacentibus, & continuatis inter sese, minus pressa à magis pressa \* subsidat in expellatur: unaquæque autem pars ejus premitur humido supra ipsam uno, & ab alio existente ad perpendicularum, si humidum \* sit descendens in aliquo, aut prematur, ab alio aliquo pressum.

Schol.

Ratio est, quia desuper incumbens pondus partibus humidi proximè subjectis motum sive conatum imprimit, & hæc sequentibus continuo ad fundum usque; ibi verò, quum ob præpotentem fundi resistentiam progredi nequeat motus, reflectitur, & in latera se diffundens, adjacentes humidi partes conturbat, atque extrudit. Ex. g. pondus A (in fig. appositâ) premens subjectas humidi partes B, motum ipsis communicat, efficitque, ut à fundo C, ad modum inepto, ad par-

V

tes

Fig. 233.

res D, E resiliant, locumque cedant deorsum nitenti corpori A. Ita mihi videtur accipienda, & explicanda hæc hypothesis.

Prop. I.

Fig. 234. Si superficies aliqua plano secetur, per idem semper punctum (A) sitque sectio (B C) circuli circumferentia, centrum habens punctum illud (A), per quod plano secatur, (sphaera superficies erit.

Nam ab A ad superficiem ducantur rectæ A B, A C utcumque, per quas transit planum; hoc in dicta superficie<sup>a</sup> producet circuli circumferentiam, cujus centrum A. <sup>b</sup>ergo A B, A C æquales erunt. Simili discursu omnes rectæ ab A ad superficiem ductæ æquales erunt. <sup>c</sup>quare superficies propolita est sphaerica. Q.E.D.

<sup>a</sup> hyp.

<sup>b</sup> 15. def. 1.

<sup>c</sup> 1. def. 1. Theod.

Prop. II.

Fig. 235. Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphaerica est, cujus sphaerae centrum est idem quod centrum terræ.

Centrum terræ sit A. Per hoc secetur humidum plano quocunque, in quo ab A ad superficiem humidi ducantur utcumque rectæ A B, A C. Hæ si pares fuerint, <sup>a</sup>liquet B C esse circumferentiam circuli, & <sup>b</sup>proinde superficiem humidi esse sphaericam. Sin impares dixeris, centro A intra humidum ducatur arcus D E. ergo B D, C E <sup>c</sup>impares sunt, & inæqualiter premunt sibi subjectas humidi partes; <sup>d</sup>unde non consistet humidum, sed conturbabitur, contra hypothesin.

<sup>a</sup> 15. def. 1.

<sup>b</sup> 1. hujus.

<sup>c</sup> 5. ax. 1.

<sup>d</sup> 1. hypoth.

Prop. III.

Fig. 236. Solidarum magnitudinum (X Y) quæ æqualem molem habentes æquæ graves sunt, atque humidum, in humidum (B A C) demissa demergentur, ita ut ex humidi superficie (B C) nihil extet, non tamen adhuc deorsum ferentur.

Bifecetur angulus B A C rectâ A F, & centro A ducatur arcus D G E, intra humidum; & si dicatur aliquid solidi eminere, puta Y, liquet contentum spatio B D G F, unâ cum Y, majus esse humido F G E C, & proinde illo plus ponderare (quum solidum X Y humido <sup>a</sup>æquæ grave sit); quare pars D G magis premetur parte G E; <sup>b</sup>nec consistet solidum, donec X Y omnino immersum fuerit, tum vero quiescet, quum compressio ubique æqualis sit. Q.E.D.

<sup>a</sup> hyp.

<sup>b</sup> 1. hypoth.

## Prop. IV.

*Solidarum magnitudinum (X) quacunque levior humido fuerit, de-* Fig. 237.  
*missa in humidum non demergetur tota, sed aliqua pars ipsius ex humidi*  
*superficie extabit.*

Fiat ut in præcedenti, & si dicatur tota X demergi, quoniam X<sup>a</sup>levi-<sup>a hyp.</sup>  
 or est humido, liquet id quod continetur spatio BDGF minùs pon-  
 derare humido FGE C, & proinde DG minus premi, quàm GE,  
 videóque haud consistere humidum, donec aliquid ipsius X emineat. b i hypoth.  
 Q.E.D.

## Prop. V.

*Solidarum magnitudinum (X Y) quacunque levior humido fuerit, vid.*  
*demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quan-* Fig. 236.  
*ta est partis demersæ (X), eandem quam tota magnitudo (X Y) gravi-*  
*tatem habeat.*

Si enim pars humidi æqualis demersæ X non æquè gravis sit, ac to-<sup>a i hypoth.</sup>  
 ta XY, liquet id quod continetur spatio BDGF unà cum Y, & hu-  
 midum CEGF non æquè ponderare; ergo DG, & EG inæqua-  
 liter premi, <sup>a</sup> ergóque humidum non manere, donec id eveniat.  
 Q.E.D.

## Prop. VI.

*Solidæ magnitudines (A) humido leviores, in humidum impulse, Fig. 238.*  
*sursum feruntur tantâ vi, quanto humidum molem habens magnitudini*  
*(A) æqualem gravius est ipsâ magnitudine (A).*

Sit X gravitas magnitudinis A, & X-Y gravitas humidi ipsi A æ-  
 qualis. Adsumatur verò B, cujus gravitas sit excessus Y. Itaque de-  
 missa A-Y in humidum, <sup>a</sup> demergetur ejus pars, cui æquale humi-<sup>a s hujus.</sup>  
 dum gravitatem habet, quantam tota A-Y B, <sup>b</sup> hoc est ipsam X-Y <sup>b hyp.</sup>  
 Y. at humidum ipsi A æquale <sup>b</sup> tantam habet. ergo pars demersa erit  
 ipsa A. Constat verò A tantâ vi sursum niti, quantâ B deorsum pre-  
 mit; (neutra enim vis prævalet). atqui B deorsum fertur vi gravita-  
 tis Y, ergo A eâdem vi assurgit. Q.E.D.

Brevius. Excedat humidum tibi æquale solidum gravitate Y. ergo  
 humidum vi solidum demergenti resistit gravitate Y; quâ vi remotâ,  
 sursum pellit A eadem vi.

*Sch.* Itaque gravia humido leviora, in ipso quasi absolutè leviantur, deperditâ propriæ gravitatis vi, & efficacîâ.

*Prop. VII.*

Fig. 239.

*Solidæ magnitudines (A) humido graviores demisse in humidum ferantur deorsum, donec descendant; & erunt in humido tanto leviores, quanta est gravitas humidi molem habentis solidæ magnitudini æqualem.*

Quòd A deorsum feretur patet, quia partes ipsi subjectæ reliquis magis pressæ cedunt ipsi, locumque dant. Porro humidi corpori A æqualis gravitas sit X, ipsius verò A gravitas sit  $X + Y$ . Liqueat corpus A in humido existens sibi subjectas partes deprimere solâ gravitate Y, qua resistantiam subjecti humidi exuperat. Quòd si extra humidum esset, totâ gravitate  $X + Y$  ponderaret, ergo in humido existens levior sit quantitate gravitatis X. *Q.E.D.*

a 3 hujus.  
b 6 hujus.

Aliter. Sit  $X - Y$  gravitas solidi A, & X gravitas ipsi æqualis humidi. Assumatur verò solidum B, cujus gravitas sit X, eique æqualis humidi gravitas  $X - Y$ . Itaque composita A - B sibi æquali humido æquè grave est, (nam  $2X - Y$  communis utriusque est gravitas). Itaque A B in humido immota consistet. ergo<sup>b</sup> cum B sursum nitatur impetu Y (quo ab humidi gravitate exceditur), eadem A deorsum feretur (æquipollent enim hæ vires, & altera alterius impedit effectum). unde liquet propositum.

*Hypoth. II.*

Ponatur eorum quæ in humido sursum feruntur, unumquodque<sup>a</sup> & deorsum. \*sursum ferri secundum perpendicularem, quæ per centrum gravitatis ipsorum ducitur.

*Lemma I.*

Fig. 240.  
Fig. 241.

Circuli se intersecant punctis E, F, quæ connectat recta EF. centra autem T, H jungat recta TH. hæc bisecat rectam EF ad rectos.

a 15. def. I.  
b 8. I.  
c 4. I.

Nam (ductis TE, TF, HE, HF) trigona TEH, TFH sibi mutuò æquilatera sunt. unde ang ETH = FTH. ergo in trigonis ETk, FTk est EK = Fk, & ang TKE = TKF. *Q.E.D.*

*Lemma.*

## Lemm. II.

In sphæræ portione centrum gravitatis est in axe portionis. Demonstratum hoc à Commandino de centro gr. prop. 15. & à Luca Val. lib. 2. prop. 34.

## Prop. VII.

Si aliqua magnitudo solida (ABC) levior humido, quæ figuram portionis sphaeræ habeat in humidum demittatur, ita ut portionis basis (AC) non tangat humidum; figura insidebit recta, ita ut portionis axis (DB) sit secundum perpendicularem. Et si ab aliquo inclinetur figura, ut basis portionis humidum contingat, non manebit inclinata, si demittatur, sed recta restituetur.

Fig. 242.

Inclinetur portio, & per axem BD, ac terræ centrum T transeat planum, faciens segmentum circuli ABC, cujus pars immersa sit E B F G. Jungatur EF, quem secet recta TH, connectens terræ ac sphæræ centra T, H, & quidem <sup>a</sup>ad rectos in K. <sup>b</sup>Estque centrum gr. portionis E L F in LK, & portionis E M F in MK, & <sup>c</sup>proinde totius E L F M in LM, puta N. Portionis verò ABC centrum gr. <sup>d</sup>est in axe BD, puta in O. <sup>e</sup>Transitque recta NO per reliquæ extra humidum partis centrum gr. quod sit P; connectatur TP. Cum igitur pars immersa <sup>f</sup>sursum feratur secundum rectam TN, pars verò extrins deorsum secundum PT (neque hæc lationes sibi invicem ullatenus obsistant, utpote per alias, aliâsq; lineas peractæ) non quiescet portio, donec hæc centra cum centro terræ in unam rectam incidant, hoc est donec axis DB sit secundum perpendicularem. Tum verò quiescent, quia quanto impetu quæ in humido est pars sursum, tanto quæ extra deorsum per eandem lineam contendit.

Not. Recta NP libram repræsentat, in qua duo gravia E B F G, A E G F C diversimodè ponderant (\*levior est enim pars immersa illâ, quæ extat). Suspendio fit ex puncto O. Radii sunt ON, OP; descendit P, attollitur N; donec puncto O in TH constituto contingat æquilibrium.

Coroll. Ex his, cum corporis cujuscunque humido levioris pars alia demergatur, alia emineat, nunquam quiescet corpus, & fluctuare desinet, donec centra harum partium, totius, & terræ in una recta conveniant, quod si contingat, tum quidem consistet corpus.

Prop.

## Prop. IX.

Fig. 243.

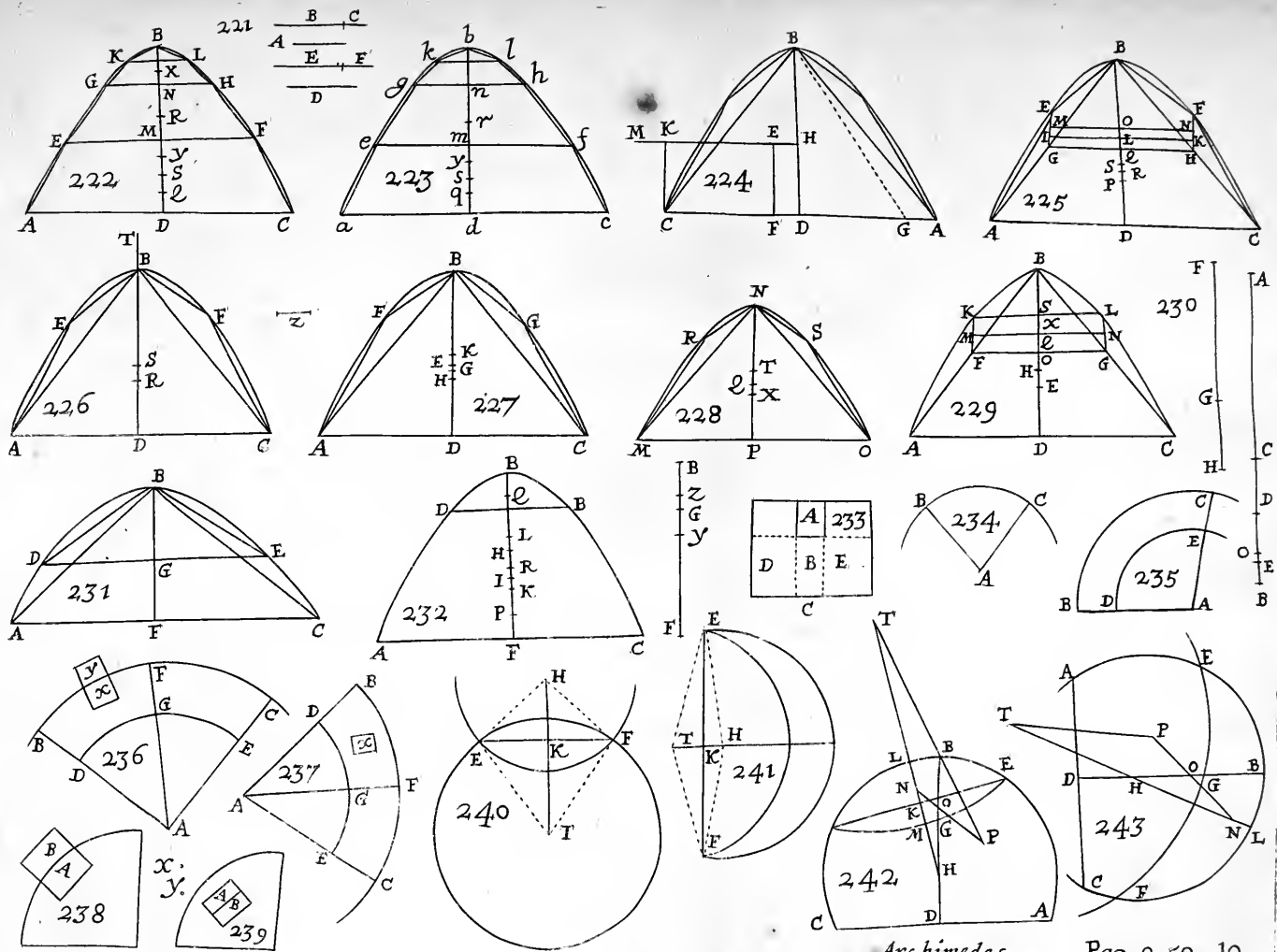
*Quod si figura (A B C) humido levior in humidum demittatur, ita ut basis tota sit in humido, insidebit recta, ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur.*

Invertatur figura præcedentis, & ex simili discursu constabit propositum.

---

  
 DE
 

---









# DE INSIDENTIBUS HUMIDO,

## LIBER SECUNDUS.

### Prop. I.

**S**i magnitudo aliqua (AB) humido levior demittatur in humidum, Fig. 244.  
 eam in gravitate proportionem habebit ad humidum (CD) equalis molis, quam magnitudinis demersæ pars (B) habet ad totam magnitudinem AB.

Sit humidi CD pars C = A<sup>a</sup> (unde D = B), corporumque trium a 3. ax. 1.  
 AB, C, D gravitates sint X, Y, Z. <sup>b</sup>unde X = Z. ergo X. Y + Z b 5. 1. hujus.  
 :: (Z. Y + Z \*:: D. C + D ::) <sup>c</sup>B. A + B. Q.E.D. c 7. 5.  
 \*

### Lemma I.

Sit conus Isosceles rectangulus ABC, in quo sectio parabola EDF, Fig. 245.  
 cujus vertex D, rectum latus R; erit AD =  $\frac{1}{2}$  R.

Nam BCq<sup>a</sup> = (BAq + CAq = 2BAq) (<sup>b</sup>ob BA = CA) a 47. 1.  
 =) 2BA × CA. <sup>c</sup>& R. AD :: BCq. BA × CA. ergo R. AD :: b 17. 6.  
 2. 1. Q.E.D. c 11. 1. Apoll.

Not. AD ab Archimede nuncupatur, ea quæ usque ad axem.

### Lemma II.

Recta GQ tangens parabolam ABC diametro BD occurrat Fig. 246.  
 (MQ); in qua ubicunque sumatur KN æqualis ei, quæ usque ad  
 axem; per contactum G ducatur GO parallela diametro, cui occur-  
 rat NO diametro perpendicularis; ducta KO tangenti GQ per-  
 pendicularis erit.

Ducantur enim GZ tangenti, & GX diametro perpendiculares. a cor. 3. 6.  
 Sitque R rectum latus parabolæ. Estque QX × XZ = (GXq<sup>b</sup>) = c 17. 6.  
 R b 11. 1. Apoll.

c 16. 6.  
d 35. 1. *Apol.*  
e *Lemm. præc.*  
f 7. 5.  
g 34. 1.  
h 33. 1.  
k *const.*  
l 29. 1.

R \* X B. ergo R . X Z :: (Q X . X B<sup>d</sup> :: 2. 1<sup>c</sup> ::) R . K N. ergo  
K Z<sup>f</sup> = N X<sup>g</sup> = O G. <sup>h</sup> unde K O, Z G parallelæ sunt; & cum  
Z G tangenti G Q<sup>k</sup> perpendicularis sit, <sup>l</sup>erit K O eidem perpendicu-  
laris. *Q. E. D.*

### Lemma III.

Centrum gravitatis dividit axem conoidis parabolici, ita ut pars ad  
verticem, ejus quæ ad basim sit dupla.

Demonstratum hoc à *Commandino*, libro de centro gravitatis, prop.  
29. & à *Luca Valerio* lib. 2. prop. 41.

### Prop. II.

Fig. 147.

Conoidis rectanguli recta portio (A B C) quando axem (B D) ha-  
buerit minorem quam sesquialterum ejus (K N) qua usque ad axem,  
quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in  
humidum, ita ut ipsius basis (A C) humidum non contingat, & posita in-  
clinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur. Rectam dico con-  
sistere talem portionem, quando planum, quod ipsam secuit, superficiei  
(E F) humidi fuerit æquidistans.

a 12 de conoid.  
& spheroid.  
b 5. 2. *Apol.*  
c 3 *Lemm. præc.*  
d *hyp.*  
e 8. 1. *æquipond.*  
f 2 *lem. præc.*  
g 29. 1.  
h 32. 1.  
k 29. 1.  
l 2 *hyp.* 1 *huj.*  
m *vid. cor. 8. 1.*  
n *hujus.*

Secetur conoides plano per axem<sup>a</sup> facienti sectionem A B C pa-  
rabolam (quod in sequentibus semper concipiatur factum, quamvis  
brevitatis causa reticeatur) cujus pars submersa habeat diametrum  
G H. Sectionem verò tangat G Q ad E F<sup>b</sup> parallela. Portionis A B C  
centrum gr. sit K, unde K B<sup>c</sup> =  $\frac{2}{3}$  D B<sup>d</sup> = K N. Sitque L centrum  
gr. partis demersæ, <sup>e</sup> unde in protractâ L K erit centrum gr. reliquæ  
partis, quod sit M: ducatur N O perpendicularis ad H G, vel B D,  
& connectatur K O secans tangentem Q G in P; <sup>f</sup> & quidem ad re-  
ctos. Jam ob angulos<sup>h</sup> K G P, K Q P (<sup>k</sup> B I F) acutos, liquet per-  
pendicularem K P cadere inter G, & B; nec centra L, M existere in  
rectâ K P; etsi ducantur L R, M S ad G Q, vel E F perpendiculares,  
<sup>i</sup>pars demersa sursum nitetur per rectam R L, pars extans deorsum  
secundum M S, tota portio A B C fertur juxta K P, <sup>m</sup> unde non con-  
sistet portio A B C, donec hæc centra incidant in axem B D. *Q. E. D.*

*Prop.*

## Prop. III.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, Fig. 248.  
quàm sesquialterum ejus quæ usque ad axem, quamcunque proportionem  
habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum ita ut basis  
ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed  
ita restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat.

Inversa figurâ, simili planè discursu probatur, quo antecedens.

## Prop. IV.

Recta portio (ABC) conoidis rectanguli, quando fuerit humido le- Fig. 249.  
vior, & axem (BD) habuerit majorem, quàm sesquialterum ejus  
(KN) quæ usque ad axem; si in gravitate ad humidum æqualis molis  
non minorem proportionem habeat eâ, quàm quadratum quod fit ab ex-  
cessu (BT), quo axis major est, quàm sesquialter ejus (KN) quæ usque  
ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe (BD), demissa in humi-  
dum, ita ut ipsius basis (AC) humidum non contingat, & posita in-  
clinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur.

Præparatio imitatur præcedentem, similisque lineæ eidem literis a 26. de conoid.  
designantur, (quod ferè fit in sequentibus.) Sit verò gravitas corpo- & spha. oïd.  
ris ABC ad gravitatem humidi æqualis ut Y ad Z. Estque GHq. b 1 hujus.  
BDq<sup>a</sup>:: (port EGF. ABC<sup>b</sup>::) Y. Z<sup>c</sup>= vel  $\sqsubset$  BTq. BDq. c hyp.  
go GH= vel  $\sqsubset$  BT, <sup>e</sup> quare GL= vel  $\sqsubset$  BN. (nam ob BT d 9 vel 10.5. &  
+  $\frac{1}{2}$  KN<sup>e</sup>=BD<sup>f</sup>=  $\frac{1}{2}$  BK<sup>g</sup>=  $\frac{1}{2}$  BN +  $\frac{1}{2}$  KN, ideóque BT<sup>h</sup>= e 14.5.  
 $\frac{1}{2}$  BN, itémque GH<sup>i</sup>=  $\frac{1}{2}$  GL, <sup>k</sup> erit GH. BT :: GL. BN). ergo f 3 lem. 1 huj.  
GL  $\sqsubset$  GO ( $\supset$  BN). ergo punctum O est inter L, G. Nec g 1. 2.  
centra totius portionis, & partium in eadem sunt linea, sed pars de- h 3. ax. 1.  
mersa <sup>m</sup> sursum tendit per RL, & altera deorsum per MS. unde non. k 15.5.  
consistit portio ABC &c. ut in præced. l 17. 1. con.  
Apol.

Coroll. BN =  $\frac{2}{3}$  BT. m 2 hyp. 1 huj.

## Prop. V.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit Fig. 250.  
majorem, quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; si ad humi-  
dum in gravitate non majorem proportionem habeat, quàm excessus, quo  
quadratum quod fit ab axe, majus est quadrato, quod ab excessu, quo  
X  
axis.

axis major est, quàm sesquialter ejus, quæ usque ad axem, ad quadratum quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat.

a 26 de conoid.  
& sphaeroid.  
b invertendo, et  
cor. 19. 5.  
c 1. 2 hujus.  
d hyp.  
e 9. vel 10. 5.  
f 22. 6.

Invertatur figura præcedentis, & stantibus quæ ibidem dicta sunt, quoniam  $B Dq. GHq^a :: port ABC. EGF$ ;  $^b$  erit  $B Dq - GHq. B Dq :: (port ABC - EGF. ABC^c) Y. Z^d =$ , vel  $\rightarrow BDq - B Tq. BDq^e$  ergo  $B Dq - GHq =$ , vel  $\rightarrow B Dq - B Tq.$   $^f$  quare  $BT =$ , vel  $\rightarrow GH$  & deinceps, ut in præcedenti.

### Lemma.

Fig. 251.

In triangulo  $TDA$  si latus  $TD$  ita dividatur, ut sit  $TD. TI :: VD. QI$ , ducanturque per  $V$  &  $Q$  parallelæ ad  $DA$ , &  $IA$ , hæ convenient in latere  $TA$ .

a hyp. & 19. 5.  
b 4. 6.  
c conv. 4. 6.

Nam  $TD. TI :: TV. (TD - VD) . TQ (TI - QI)$ . ergo convertendo  $TD. ID :: TV. QV$ . atqui  $ID. DA^b :: QV. VY$ . (ob  $VY$  ad  $DA$ , &  $QY$  ad  $IA$  parallelas) ergo ex æquo  $TD. DA :: TV. VY$ .  $^c$  ergo  $TYA$  est recta linea.  $Q.E.D.$

d 4. 6.  
f 19. 5.

2. Quod si convenient parallelæ in  $Y$ , erit  $TD. TI :: VD. QI$ . Nam  $TD. DA^d :: TV. VY$ . &  $DA. ID^d :: VY. QV$ . ex æquo igitur  $TD. ID :: TV. QV$ .  $^f$  ergo  $TD. TI :: TV. TQ :: VD. (TD - TV). QI. (TI - TQ)$ .  $Q.E.D.$

Coroll.  $TV. TQ :: VD. QI$ .

### Prop. VI.

Fig. 252.

Conoidis rectanguli recta portio  $(ABC)$ , quando levior humido axem  $(BD)$  habuerit majorem quidem, quàm sesquialterum ejus  $(KN)$  quæ usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ usque ad axem proportionem habeat, quam quindecim ad quatuor, in humidum demissa, adeo ut ipsius basis  $(AC)$  contingat humidum  $(AF)$ , nunquam consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidum contingat.

Fiat ut in præcedentibus, & porro sit  $KV = \frac{4}{5} DB$ ; (unde cum a 3. lem. 1. 2.  $DK^a = \frac{1}{5} DB$ , erit  $DV = \frac{2}{5} DB$ , &  $BY = \frac{6}{5} DB$ , & proinde  $BV = \frac{6}{5} DV = \frac{2}{5} DV$ ). Contingant  $GQ, AT$  occurrentes diametro  $TQBD$ ; ducanturque  $VY$  (sectioni occurrens in  $M$ , tangenti  $QG$  in  $Y$ ),  $NO, GX, H$  basi  $AC$  parallelæ.

Jam

Jam si  $BD, BV, BX$  sint  $\div\div$  (quod fortè contingere potest), <sup>b 20 1 Apol.</sup> <sup>c 22. 6.</sup> <sup>d hyp.</sup> <sup>e prius.</sup> <sup>f cor. 20 6</sup> <sup>g cor. 4. 6.</sup> <sup>h 4. 6.</sup> <sup>k 34. 1.</sup> <sup>l 35. 1. Apol.</sup> <sup>m 19. 5.</sup> <sup>\* cor. lem. prac.</sup> <sup>n prius.</sup> <sup>o lem. prac.</sup> <sup>p 35. 1. Apol.</sup> <sup>q 2. ax. 1.</sup> <sup>q 35. 1. Apol.</sup> <sup>r 19. 5.</sup> <sup>s schol. 7. 5.</sup> <sup>t 15. 5.</sup> <sup>u prius.</sup> <sup>x 3 lem. 1. 2 h.</sup> <sup>y sch. 2. 6.</sup> <sup>z 8. 5.</sup>  
<sup>am</sup>  $DAq, VMq, XGq$  erunt  $\div\div$  in eadem ratione, <sup>ergo</sup>  $DA, VM, XG$  erunt  $\div\div$ . Item  $BV, BX :: BD, BV :: DAq, VMq :: DA, XG :: DI, XQ$  (ob trigona  $ADI, GXQ$  similia). ergo permutando  $DI, BV :: XQ$  (<sup>h 1</sup>  $Q$ , ob  $H^k = XG$ ).  $BX^l :: 2. 1^m$ .  $D^o$  ( $DI - I^o$ ).  $VX(BV - BX)^1 :: TD, BD$ . Item (ob  $BD, BV :: BV, BX$ . erit convertendo).  $BD, VD :: BV, VX$ . ergo ex æquo  $TD, VD :: DI, VX$ . & permutando  $TD, DI :: VD, VX$ . ac convertendo  $TD, TI :: VD, VD - VX$ , vel  $QI$ . (Nam  $QI^k = GH^k = X^o = V^o + VX = V^o + \frac{1}{2} D^o = V^o + D^o - \frac{1}{2} D^o = VD - \frac{1}{2} D^o^n = VD - VX$ ). <sup>o</sup> ergo punctum  $Y$  est in  $TA$ . Porro, quia  $VD, X^o$  (<sup>a</sup>  $GH$ ) <sup>\*</sup>:  $TV$  (<sup>p</sup>  $DB + BV$ ).  $TQ$  (<sup>q</sup>  $DX$ ). <sup>r</sup> erit  $VD, GH :: DB + BV - VD, DX - X^o$ . atqui  $DB + BV - VD = 2BV^n = DI$ . &  $DX - X^o = D^o$ . <sup>s</sup> ergo  $VD, GH :: DI, D^o^t :: BV$  ( $\frac{1}{2} DI$ ).  $\frac{1}{2} D^o$  (<sup>n</sup>  $VX$ , vel  $GZ$ ). & permutando  $GH, GZ :: DV, BV^u :: 3. 2.$  x unde punctum  $Z$  erit centrum portionis  $AGF$ , in hoc casu.

Quod si porcio major sit minorve, quàm ut  $BD, BV, BX$  sint  $\div\div$ , fit illa  $aBc$ , diametro  $Bd$ , base  $ac$  ad  $AC$  parallelâ, ita ut submergatur portio  $aBf$ , diametro  $Gh$ , base  $af$  ad  $AF$  iridem parallelâ, cui occurrat tangens  $TAR$ , ducaturque  $RS$  ad  $AC$  parallela, & occurrens diametro  $Bd$  in  $S$ . Estque  $SV, DV :: RY, AY :: Gh, GH$ . & permutando  $SV, Gh :: DV, GH :: BV, GZ$ . iterumque permutando  $Gh, GZ :: SV, BV :: DV, BV^u :: 3. 1.$  quare in hoc casu centrum cadit inter  $z$ , &  $h$ ; & proinde infra  $O$  in quocunque casu (quoniam  $KV \Rightarrow KN$ ). Itaque cum tota portio gravitet secundum rectam  $KOP$ . & pars quæ demergitur, quæque extat per alias, liquet solidum non consistere &c. ut in præcedentibus.

Coroll.  $BV = \frac{1}{5} DB$ .

### Prop. VII.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit, majorem quidem, quàm sesquialterum ejus, qua usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, que usque ad axem proportionem habeat, quàm 15 ad 4, in humidum demissa adeò ut basis ipsius tota sit in humido, nunquam consistet ita, ut basis contingat humidæ superficiem, sed ut tota in humido sit, & nullo modo ejus superficiem contingat.

Fig. 253.

Inversa figurâ, eodem modo demonstratur quo antecedens.

## Prop. VIII.

Fig. 253. Conoidis rectanguli recta portio (ABC), quando axem (BD) habuerit majorem quidem, quam sesquialterum ejus (KN) quæ usque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam, quæ usque ad axem, proportionem habeat, quam 15 ad 4: si in gravitate ad humdum habeat proportionem minorem ea, quam quadratum, quod sit ab excessu (BT) quo axis major est, quàm sesquialter ejus quæ usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basi ipsius (AC) humidum non contingat, neque in rectam restituatur, neque manebit inclinata, nisi quando axis (BD) cum superficie humidi (EF) angulum fecerit æqualem ei, de quo infra dicitur.

a hyp.

b 10. 5. &amp; 22.

c 15. 5.

d cor. 4. 2 h.

e 1. 6.

f 7. 5.

g 35. 1 Apol.

h 16. 6.

i 11. 1 Apol.

j 1. lem. 1.

k 2 h.

l 4. 6.

m conftr.

n censur. &amp; 7. 5.

o 11. 5.

p 9. 5.

q 26. de conoid.

r 11. 1 Apol.

s 9. 5.

t 3. lem. 1. 2 h.

u conftr.

x 34. 1.

y 1. ax. 1.

z sch. 8. 1 hnj.

a prius. suprâ.

b 8. 5.

c 4. 6.

d ut suprâ.

e 10. 5.

f prius.

g 15. 5.

h conftr.

i supra.

l hyp.

z. vid. cor. 8. 1.

hujus.

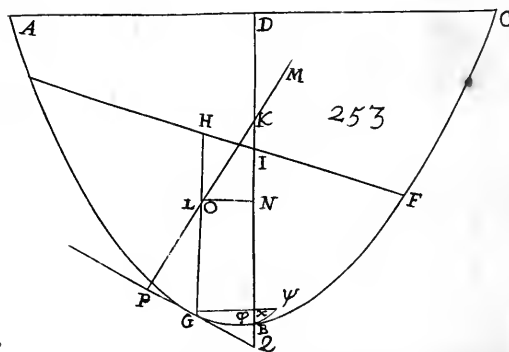
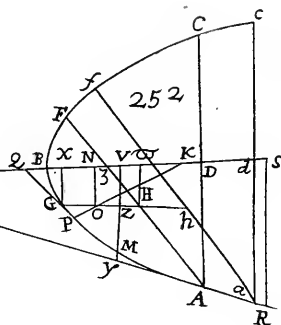
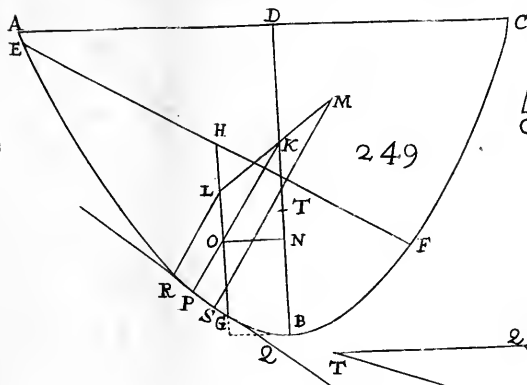
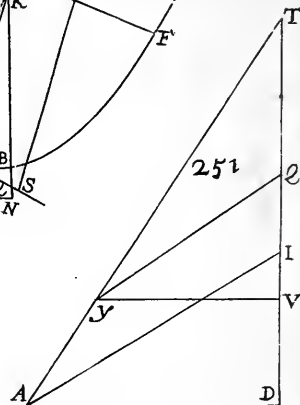
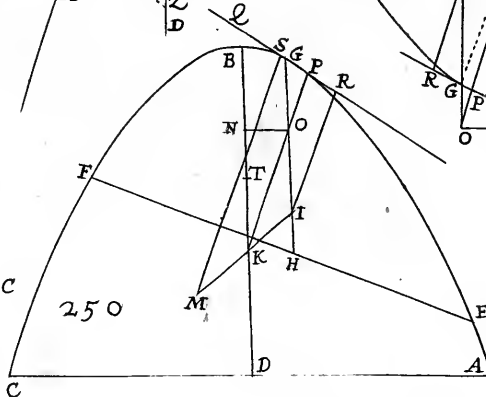
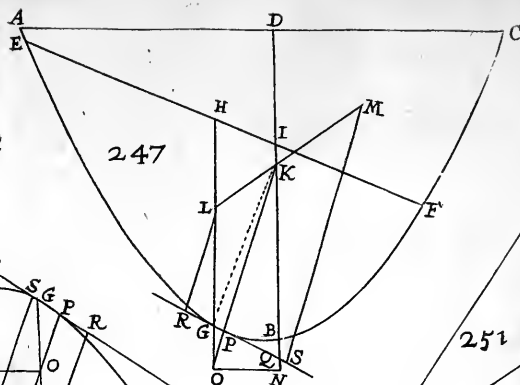
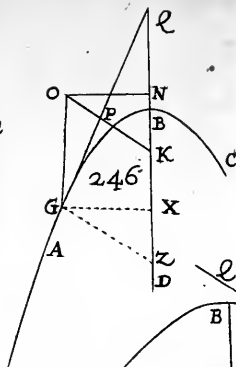
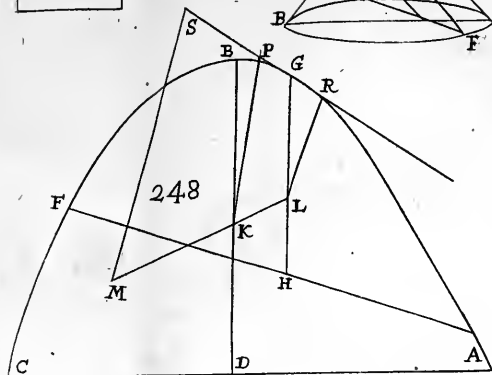
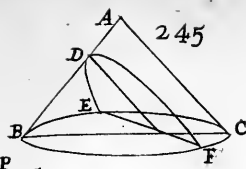
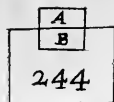
Sit gravitas portiones ad gravitatem humidi ut  $Zq$  ad  $B Dq$   $\rightarrow$   $B 1q$ .  $B Dq$ . itaque  $Z \rightarrow B T$ , &  $\frac{2}{3} Z \rightarrow B N$  ( $\frac{2}{3} B T$ ). Sit  $N \phi = \frac{2}{3} Z$ . & erigatur  $\phi \downarrow = \sqrt{\frac{1}{2} KN \times B \phi}$ , junganturque  $B \downarrow$ , erit angulus  $\phi B \downarrow$ , is quem propositio innuit. Nam 1. sit ang  $\phi B \downarrow =$  ang  $E I D$ , vel  $G Q X$ . Estque  $KN \cdot X Q^c :: KN \cdot X Q$ .  $X Q q^i :: G X q$ .  $X Q q$  (nam  $KN \cdot X Q^c = (KN \cdot 2 X B^h = 2 KN \cdot X B^k =) G X q$ )  $^i :: \phi \downarrow q$ .  $B \phi q$  (ob  $^m$  similia trigona  $Q X G$ ,  $B \phi \Psi$ )  $^n :: \frac{1}{2} KN \cdot B \phi$ .  $B \phi q^c :: \frac{1}{2} KN$ .  $B \phi^c :: KN$ .  $2 B \phi^o :: KN$ .  $X Q$  pergo  $2 B \phi = X Q$ . &  $X B$  ( $\frac{8}{2} X Q$ )  $= B \phi$ . unde  $XN = \phi N^m = \frac{2}{3} Z$ . Cùmque sit  $G H q$ .  $B D q^i ::$  (port  $E G F$ .  $A B C^r ::$ )  $Z q$ .  $B D q$ , & propterea  $G H^s = Z$ , erit  $\frac{2}{3} G H$  ( $^t GL$ )  $^c = \frac{2}{3} Z^u = \phi N^x = G O^y = G L$ . & centrum  $L$  cum  $O$  coincidit. quare centra portionum sunt in perpendiculari  $K P$ , &  $z$  proinde tota portio immota consistit.

2. Quod si ang  $\phi B \downarrow \rightarrow$  ang  $X Q G$ , fiat ang  $X Q Y = \angle \phi B \downarrow$ . Estque  $KN \cdot X Q^a :: G X q$ .  $X Q q^b \leftarrow Y X q$ .  $X Q q^c :: \phi \Psi q$ .  $B \phi q^d :: KN$ .  $2 B \phi$ .  $^e$  unde  $X Q$  ( $^i 2 X B$ )  $\rightarrow 2 B \phi$ .  $^s$  &  $B X \rightarrow B \phi$  quare  $N X$  ( $G O$ )  $\leftarrow$  ( $N \phi = \frac{2}{3} Z = \frac{2}{3} G H$ )  $^1 = G L$ . Cadit igitur punctum  $O$  intra centrum  $L$ : nec sunt centra portionum in una recta  $K P$ . unde tota portio non consistit.

3. Quod si ang  $\phi B \Psi \leftarrow X Q G$ , simili discursu ostendetur punctum  $O$  cadere supra  $L$ .  $z$  unde etiam consequetur motus portionis  $A B C$ , quomodo sæpius inculcatum.

## Prop. IX.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit, majorem quidem quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm 15 quàm







ad 4, & in gravitate ad humidum proportionem habeat majorem, quam excessus, quo quadratum quod fit ab axe majus est quadrato, quod ab excessu, quo axis est major, quam sesquialter ejus, quæ usque ad axem, habet ad quadratum quod ab axe, in humidum demissa adeo ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, nec convertetur ita ut axis ipsius secundum perpendicularem sit, nec manebit inclinata, nisi quando axis cum superficie humidi angulum fecerit aequalem angulo similiter ut prius assumpto.

Nam inversâ figurâ præcedentis, quoniam  $B Dq. GHq. :: port ABC. EGF$ , <sup>b</sup> erit  $B Dq. GHq. B Dq. :: port ABC. EGF$ . <sup>a 26 de conoid.</sup>  
 $ABC :: Zq. B Dq$  <sup>d</sup>  $\sqsubset B Dq. BTq. B Dq.$  <sup>b cor. 9. 5. & 4. 5</sup> quare  $B Dq. GHq$  <sup>c hyp. & 1. 2 h.</sup>  
 $(-Zq) \sqsubset B Dq. BTq.$  <sup>d hyp.</sup> \* ergo  $Z \sqsupset B T.$  &  $\frac{2}{3} Z (Nq) \sqsupset \frac{2}{3} BT$  <sup>e 10. 5.</sup>  
 $(NB) \&c.$  ut in præcedenti. <sup>\* 17. ax. I.</sup>

Schol. Sit  $IK$  axis parabolæ  $GIC$ , ejusque basis  $GC = 2GK$ . & educatur  $GN$ , utcumque secans parabolam  $GBA$ . Ordinatum applicetur  $NP$ , & connectatur  $GP$  occurrens ipsi  $BD$  in  $O$ : à quo applicetur  $OH$  ordinatum. Sintque  $R, S$  recta latera sectionum  $GIC, GBA$ . Sûntque tam  $IK, KG, R$ , quam  $BD, BG, S$  in  $\div$ . unde cum  $IK. KG :: BD. DG$ . erit  $IK. R :: BD. S$ . & permutando  $IK. BD (IG. BG, vel IP. BO) :: R. S$ . atqui  $IP, NP, R$ , &  $BO, HO$ ,  $S$  sunt etiam  $\div$ . ergoque  $IPq. NPq :: (IP. R :: BO. S) :: BOq. HOq$ . ergo permutando  $IP. BO :: GP. GO :: NP. HO$ . unde sectionis punctum  $H$  est in recta  $GN$ . & hinc

Fig. 256.

1. Coroll.  $GN. GH (GP. GO) :: GI. GB :: (GK. GD) :: GC. GA. \& GH. HN :: GA. AC :: GB. BI :: GD. DK$ .

Porro, ducatur  $NM$  ad  $IK$  parallela. Estque  $GC. GA :: (GN. GH :: GM. GK :: MC. AK. \& permutando GC. MC :: GA. AK :: LK. HK. item GC. GK :: 2. 1 :: LK. LI. ergo GC. MC + GK :: LK. HK + LI. ergo GC. KM :: LK. IH. vel GK. KM$   $(:: GH. HN, vel GA. AC, vel GD. DK) :: LI. (IK). IH$ . Hinc

2. Coroll.  $LK. HK :: GA. AK. \& dividendo LH. HK :: GK. AK$ . Et simili discursu

$EX. XB \} :: GK. AK :: LH. HK.$   
 1y. 1b. }

Porro, quia  $LI. IH :: GA. AC$ . erit inversè componendo  $IH. LH :: AC. GC$ . Item  $LH. HK :: GK. AK$ . atqui  $IH. HK = IH. LH (AC. GC) + LH. HK (GK. AK)$

3. Coroll.  $IH. HK = AG. GC + GK. KA$ .

Quod si base  $KG$  fiat altera parabola  $GIK$ , similis prioribus, similiter

$$\text{ler erit } \left\{ \begin{array}{l} \text{X B. B Z} \\ \text{y h. h i} \end{array} \right\} = \text{A G. G C} + \text{G K. K A} = \text{I H. H K.}$$

Prop. X.

Fig. 257.

Fig. 258

Recta portio (A B C) concidis rectanguli, quando levior humido habuerit axem (B D) majorem quàm ut ad eam (K N) quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm 15 ad 4, in humidum demissa, ita ut basis ipsius (A C) non contingat humidum; nonnunquam quidem recta consistet, nonnunquam inclinata; & interdum adeò inclinata, ut basis ipsius in uno puncto contingat superficiem humidi; idque in duabus dispositionibus, interdum quidem ita ut basis in humidum magis demergatur, interdum verò ita ut superficiem humidi nullo modo contingat, secundum proportionem quam habet ad humidum in gravitate. Eorum quæ dicta sunt singula inferius demonstrabuntur.

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq; sitque  $\text{BK} = \frac{2}{3} \text{BD}$ ; &  $\text{KV} = \frac{2}{3} \text{BD}$ , &  $\text{KN} (\neg \text{KV})$  ea quæ ad axem; &  $\text{DT} = \frac{1}{2} \text{KN}$ .

a hyp.

b const.

1°. Si Zq. B Dq non  $\neg$  B Tq. B Dq. quoniam  $\text{BT}^b = \text{BD} - \frac{1}{2} \text{KN}$ , in humidum demissa portio A B L non nisi recta consistet, juxta 4 hujus.

c vid. sch. 5. de

quad. parab.

d ibid.

e 4. 6.

f corol. 6.2. b.

g 15. 5.

h prius.

k 3 cor. sch. 5 de

quadr. parab.

l 20. d f. 5.

m

Pro sequentibus jungatur A B, quam secet V C ad B C parallela. Item bisecta A B in  $\mu$ , ducantur  $\epsilon \gamma, \mu \nu$  ad B D parallela: tum ad basibus ad A C diametrisque  $\epsilon \gamma, \mu \nu$  describantur parabola A C  $\alpha$ , A  $\mu$  D; quarum A C  $\alpha$  transibit per K, (nam D A. V C (D  $\gamma$ )<sup>c</sup> :: B D. B V<sup>d</sup> :: 15. 6. & dividendo A  $\gamma$ .  $\gamma$  D :: 9. 6<sup>e</sup> :: 3. 2<sup>b</sup> :: B D. B K). Producatur N  $\epsilon$  ad D A parallela, occurrens sectioni A C  $\alpha$ , punctis  $\delta, \epsilon$ . per quæ ducantur  $\theta \delta, \kappa \epsilon$  ad B D parallela. Estque A  $\alpha$ . A  $\gamma$ , vel  $\gamma \alpha$ <sup>a</sup> = 3, &  $\gamma$  D = 2, unde D  $\alpha$  = 1, &  $\alpha$  C = 4. itaque  $\theta \delta$ .  $\delta \alpha$  (C  $\alpha$ . C A + A D. D  $\alpha$ )<sup>h</sup> = 2. 5 + 5. 1<sup>i</sup> = 2. 1<sup>m</sup> ::  $\kappa \epsilon$ .  $\epsilon \delta$ . denique ducantur tangentes  $\theta \phi, \kappa \psi$ .

Conclusio 2.

Si portio (A B C) ad humidum in gravitate minorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum B T ad quadratum B D, majorem verò quàm quadratum  $\theta \alpha$  ad quadratum B D, demissa in humidum adeò inclinata, ut ipsius basis (A C) non contingat humidum, inclinata consistet, ita ut basis superficiem humidi nullo modo contingat, & axis (B D) cum humidi superficie (E F) angulum faciat majorem angulo ( $\phi$ ).

Nam

Nam quia  $Zq. B Dq. \left\{ \begin{array}{l} \angle \theta \varpi q. B Dq \\ \Rightarrow B T q. B Dq \end{array} \right\}$ , erit  $Z \left\{ \begin{array}{l} \angle \theta \varpi \\ \Rightarrow B T \end{array} \right\}$ . quare si <sup>a hyp.</sup>  
inter sectiones  $A B C$ ,  $A \mu D$  aptetur ad  $B D$  parallela recta  $G H^c =$   
 $Z$ , cadet hæc inter  $B D$ , &  $\theta \varpi$ : per  $H$  ducatur recta  $A F$ , quæ humi-  
di superficiem representet. Itaque  $G H$  est diameter demersæ portio-  
nis  $A G F$ . ducatur tangens  $G Q$ , sitque  $G L = \frac{1}{3} G H$ , (<sup>d 3 lemm. 2 h.</sup>  
centrum portionis  $A G F$ ), ducaturque  $L K M$ , <sup>e 8. 1 aequip.</sup> sic ut  $M$  sit centrum  
partis extantis, & ob  $G L^f = 2 L H$ , erit  $G O \Rightarrow 2 O H$ , quare  $O$  ca-  
dit supra  $L$ ; & cum portio  $A B C$  sferatur juxta rectam  $K O$ , pars <sup>f conftr.</sup>  
demersa attollatur per illi parallelam  $L R$ , altera deprimitur secun-  
dum  $M S$ ; quiescat tandem, ut humidi superficies sit  $E F$ , eique pa-  
rallela tangens  $X Y$ , constâtque esse ang  $X Y B^h \Rightarrow$  ang  $Q^h \Rightarrow$  ang  $\varphi$ . <sup>g 2 hypoth. 1. h.</sup>  $h$  16. 1.  
 $\angle E. D.$  <sup>2 lem. 1. 2 h.</sup>

## Concl. 3.

Si portio ( $A B C$ ) ad humidum in gravitate eam habeat rationem,  
quam quadratum  $\theta \varpi$  ad quadratum  $B D$ , demissa in humidum inclina-  
ta adeò, ut basis ipsius non contingat humidum, consistet & manebit ita,  
ut basis ( $A C$ ) in uno puncto humidi superficiem ( $A \varpi$ ) contingat, & axis  
cum superficie humidi angulum faciat angulo  $\varphi$  aequalem. Quod si por-  
tio ad humidum in gravitate eam proportionem habeat, quam quadra-  
tum  $\kappa \xi$  ad quadratum  $B D$ , in humidum demissa, & posita inclinata  
adeò, ut basis ipsius ( $A C$ ) non contingat humidum; consistet inclina-  
ta, ita ut basis in uno puncto humidi superficiem contingat, & axis cum  
ea faciat angulum angulo  $\downarrow$  aequalem.

Nam 1º.  $\theta \varpi$  ( $\angle Z$ ) est diameter portionis  $A B f$ , ejusque centrum <sup>a cor. 8. 2 huj.</sup>  
est  $\delta$  (ob  $\theta \delta^c = 2 \delta \varpi$ ), & si per  $K \delta$  ducatur recta, hæc per tria  
centra transibit, & secundum ipsam tota portio, ipsæque partes feren-  
tur, ergo immota consistet portio. Estque ang  $\varphi =$  ang  $A \varpi Z$  (ob <sup>b 3 lem. 1. 2 h.</sup>  
 $\theta \varphi$ ,  $A \varpi$ , &  $\theta \varpi$ ,  $B D$  parallelas). Quod si portio in alio situ consti-  
tuatur, centrorum situs immutabitur, neque in una recta convenient,  
unde commovebitur portio, donec in hunc situm restituatur. Simili  
discursu, si  $Zq. B Dq. :: \kappa \xi q. B Dq.$ , erit  $\kappa \xi (= Z)$ , diameter portio-  
nis submersæ, & tota portio consistet sub angulo  $\downarrow = A \xi \lambda$  &c. <sup>c 2 lem. 1. 2 h.</sup>  
<sup>d sch. 8. 1 huj.</sup>

## Concl. 4.

Si portio ( $A B C$ ) ad humidum in gravitate majorem quidem pro-  
portionem habeat, quàm quadratum  $\kappa \xi$  ad quadratum  $B D$ , minorem  
verò

verò quàm quadratum  $\theta^2$  ad quadratum  $BD$ ; in humidum demissa, & inclinata, adeò ut ipsius basis  $(AC)$  non contingat humidum consistet, & manebit ita, ut basis in humidum magis demergetur.

Simili ferè discursu probatur, quo secunda conclusio inter parabolas  $ABC$ ,  $A\mu D$  aptando  $GH (= Z)$ ; quæ in hoc casu cadet inter  $a$  hyp. & 16.5.  $\theta^2$ ,  $\kappa\xi$ , quia  $Z^2 \left\{ \begin{array}{l} \supset \theta^2 \\ \supset \kappa\xi \end{array} \right\}$ . Eritque tum (in situ  $AGF$ )  $GO \supset 2OH$ , & propterea punctum  $O$  cadit inter centrum  $L$ , &  $H$ ; neque consistet humidum in illo situ, sed quum basis magis demergetur.

Concl. 5.

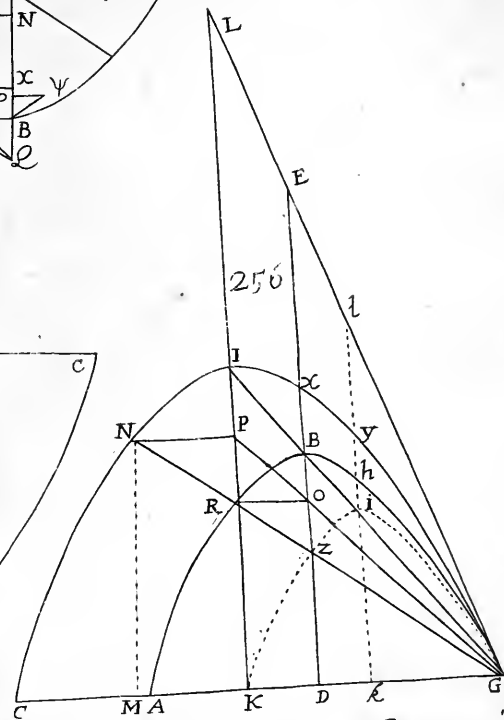
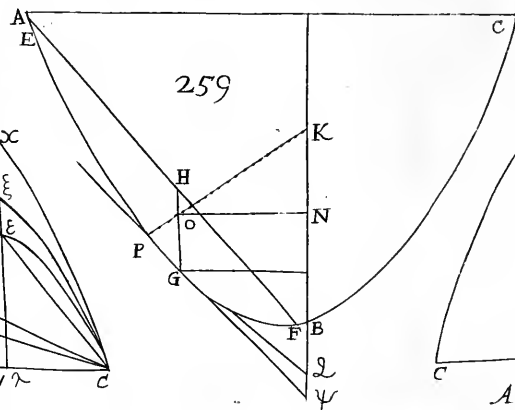
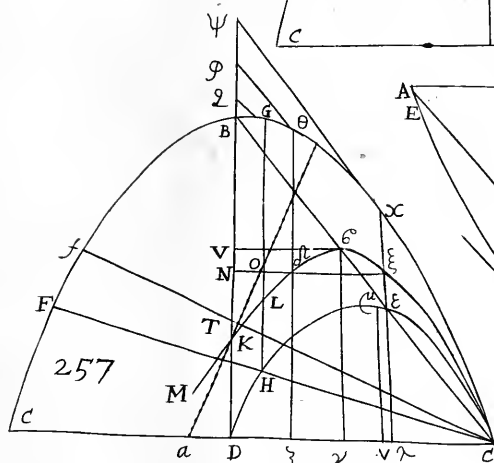
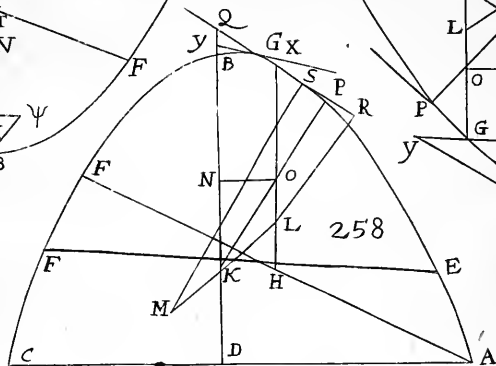
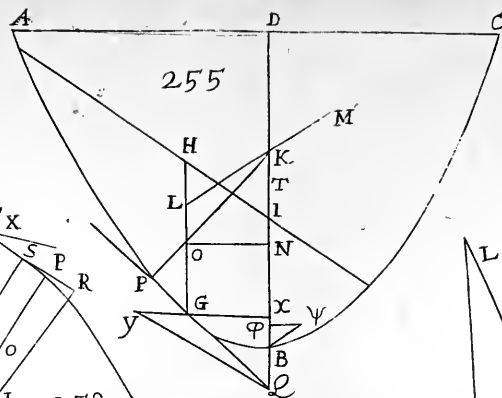
Fig. 239. Si portio  $(ABC)$  ad humidum in gravitate proportionem habeat minorem, quàm quadratum  $\kappa\xi$  ad quadratum  $BD$ ; demissa in humidum, & posita inclinata adeò ut basis ipsius  $(AC)$  non contingat humidum, consistet inclinata, ita ut ipsius axis  $(BD)$  cum humidi superficie angulum faciat  $(Q)$  minorem angulo  $\psi$ , & basis  $(AC)$  nullo modo superficiem humidi contingat.

Probatur itidem ut 2<sup>da</sup>, aptando rursus  $GH = Z$ , & hic in situ  $AGF$  erit  $GO \supset 2OH$ , & punctum  $O$  cadet inter centrum  $L$ , & verticem  $G$ . itaque ut consistat, inclinari debet.

Liquet verò in hoc casu positâ  $EF$  superficie humidi consistentis,  $GH$  diametro portionis  $EGF$ ,  $GQ$  ad  $EF$  parallêla, esse ang  $Q \supset \psi$ .

Nam si ang  $Q \supset \psi$ , erit idcirco punctum  $Q$  inter  $B$ , &  $\psi$ , & punctum  $G$  inter  $B$ , &  $\kappa$ . unde  $GO \supset \kappa\epsilon$ . Atqui  $\kappa\epsilon = \frac{2}{3}\kappa\xi$   $\supset \frac{2}{3}GH = \frac{2}{3}Z$ . unde  $GO \supset \frac{2}{3}GH$ . unde  $O$  non erit centrum portionis  $EGQ$  quare portio  $ABC$  non consistet, contra  $e$  3 lem. I. 2 h. hypothefin.

FINIS.







# LEMMATUM ARCHIMEDIS, quæ vocantur, Editio Nova.

## PRÆFATIO.

**H**ÆC **مأخوذات** *Machudât*, sive *Lemmata Archimedis*, quorum pars magna usum habet atque elegantiam, nè penitus interirent inter *Motawaf-*

*setât* **متوسطات** i.e. libellos inter *Elementa Euclidæ-*

*ana* grandemque *Ptolemæi Syntaxin* medios, (quos *Alexandrini* jam olim **μεγὰρ Ἀρξινόου** appellitabant,) adseruare maluerunt *Arabum Mathematici*: quod præter præfationem *Abi'lHasan*, duo Codices Bibliothecæ *Bodleianæ* nimio satis comprobant. De *Græcis* tamen minùs emendatis quingentis penè abhinc annis *Arabica* fecit Vir Cl. *Thabertus Corraides*. Postea Notis suis nè vix adornavit is quem dixi, *Abu'lHasan* (vel *Abu'lHonein*, ut aliqui volunt proclivi errore) *Ali Ebn Ahmed Nasræus* **ابو الحسن علي بن**

**أحمد النسوي**. Quinetiam Latinè nunc ea leguntur ex duplici versione, alterâ quidem Celeberr. V. D. *Johannis Gravii*, quæ cum animadversionibus pauculis *Sam. Fosteri* Prælectoris *Greshamensis* sæculi hujusce deurgentis anno LIX. *Londini* prodiit, mox alterâ *Abrahami Ecchelen-*

# PRÆFATIO.

lenfis, quam suis adnotatis illustravit, atque adeò *Florentia* edidit egregius Mathematicus *Alf. Barellus*. Valde autem miror virum præclarum alterumq; planè *Siciliæ* decus, de istorum Lemmatum Authore tam anxie disputare: dummodo constat, ut nihil certius, Lemma omnium primum illud esse quod ad Tactiones *Apollonianas* suo ex ingenio posuit *Pappus*: tum quantum quintumve nè vix ab eis differre, quibus Theorematum Floridorum Conditor Propositionem *αρχαίων* sed nulli certo Authori redditam (hanc in Lemmatum horunce sextum ita conjectam hodièq; legis) illustratam voluit, nim. *Prop. XIV. & XVII. Arabes* autem, quibus *Archimedis* nomen in Mathesi præ cæteris clarius fuit notiusque, vocabula ipsa *ἀρχιμεδίων & σελένιον* (*Lem. 4. & 15.*) summo viro retulere; quanquam *Pappus*, cuius fortean de scriptis *Eutocius* (sic amat) pleraque hæc Lemmata carpserrat, simplicius paulò dixerat, *χρειώτερον δὲ καλεῖσθαι ἀρχιμεδίων*: de voce alterà certa est fides diu ante *Archimedem* natum apud Geometras valuisse. \*Opus potius esse mixtum reor, atque ab uno vel altero Theoremate sive *Archimedis* sive *Apollonii*, (talìa enim ultrò inducit Doctrina Tactionum,) certè perantiquo, cæteris omnibus, ut audent. scioli, hominis pænè Divini nomen additum inscriptumque. Lemmatum verò suorum libellum scripsisse olim *Archimedi* nullus putem aut voluisse. Isthac ita præcipuè modò Propositioni præmittere solet, modò ἀπὸ τέλει subji cere. Quod ad quartum alterius libelli *ἀπὸ σφ. κ. καὶ*, con queritur *Eutocius*, minus innuit quàm viro docto per placeat: plerisque puta Exemplaribus Operum *Archimedis* binorum Lemmatum tam ἀνάλυσιν quàm συνθεσιν, quas ad *Prop. IV.* pollicitus erat, malè excidisse; tum duo illa Theoremata (plura nè cogites) quæ fortè repperat *Eutocius* adeò fuisse propter Scribam malehabita, corrupta & defor-

\*si homines huic etiam iribuerunt libellum, qui erat Zenodori de *Isope rimetris*, inò fragmentum de *Statica*, atque ali.



## PRÆFATIO.

deformia, ut pro *Archimedéis* accipere quæ erant *Archimedis*, omnino subvereretur. Sed præfari multis haud decet. Breviculus enim ex se liber iste est, & hoc compendio adhuc brevior.

Id verò submonendum puto, Schemata quæ heic vides ab Autographis Præstantissimi viri D. *Jac. Golii* fuisse expressa, sive in meliores codd. incidit ille, quàm *Abr. Ecchellenfis* atque ego vidimus, sive potius ingenio ac eruditione suis plus maximo potuit. Verùm de tanto viro, deque filii ejus erga me meritis tum dicam quæ sentio ipse, & omnes scire oportet, quando adhuc alia quàm stricuras scripsero & Epitomas.

---





# ARCHIMEDIS LEMMATA.

## Lemma I.

**B** Inorum circulorum ABC, DBE, sese intra extrave tangentium in B diametri AC, DE invicem parallele sint; recta linea est que per AD B transit. Fig. 260.  
261.

Adjunctæ rectæ <sup>a</sup>FG B æquidister <sup>b</sup>BDH. Jam propter æquales HF<sup>c</sup>, DG<sup>d</sup>, GB, necnon <sup>e</sup>FA, FB; erit HA = <sup>f</sup>FG = <sup>g</sup>DH, & <sup>h</sup>ADH = A. Atque ob pares <sup>i</sup>BGD, BFA, DHA, erunt <sup>j</sup>BDG + B = A + ADH = 2A, & BDG<sup>k</sup> = A. Unde <sup>l</sup>ADG + A<sup>m</sup> = 2 rect = ADG + GDB. Recta igitur <sup>n</sup>linea est ADB. Aut in fig. alterâ, Unde <sup>o</sup>ABG + A(= <sup>p</sup>FB D + HD.B) <sup>q</sup>= 2 rect = ABG + (BDG<sup>r</sup>) GBD, & A B D<sup>s</sup> recta est. a 11, 12, 3.  
b 31. 1.  
c 34. 1.  
d 15. def.  
e ax. 3, 2.  
f 5. 1.  
g 29. 1.  
h cor. 32. 1.  
i ax. 7.  
j ax. 2, 1.  
m 14. 1.  
n 15, 29. 1.

## Notæ.

Hoc lemmate Prop. XXIV<sup>am</sup> Operis Apollonii *ἐπὶ ἐπαφῶν* jam olim illustrabat Pappus, ut videre est Prop. CX. LVII<sup>m</sup> *Συναγωγῶν*. Com-  
monstrat verò (connexis radiis GB, FB, & ipsis GD, FC invicem  
parallelis) tam FBG quàm ABD rectas esse, apodixi probâ quidem  
(contra quam putat Vir doctus,) & eleganti. Ecce illam!

Est enim ductâ. tangente OP, GBO<sup>o</sup> = recto<sup>o</sup> = OBF, atque <sup>o</sup>18. 3.  
<sup>m</sup>GBF recta. Et, quia <sup>p</sup>DG. GB :: BF. FA, & DG B<sup>q</sup> = <sup>p</sup>def. 15. et 7. 5.  
BF A, erit <sup>r</sup>GBD = FBA. Recta autem est GF, ergo <sup>s</sup>ABD <sup>r</sup>6. 6.  
etiam recta. s sch. 15. 1.

Consimile autem Lemmation Cl. Commandinus Propositioni XIV.  
Libri Quarti Collect. Pappi addidit, ut opus fuit, quod vide. Ve-  
rùm id jam obiter monitum velim, Propositionem illam XIV Pappi  
candem omninò fuisse (sic reor) cum XXIV<sup>ta</sup> Geometræ Ptergei de

Tactionibus, atque adeò utramque minimè differre abs horum Lemmatum Quinto; omnes equidem ipsas eadem Lemmata, Illustrationes easdem, ut probè consent, exposcere.

Casum duntaxat facillimum exposuit *Abu'l Hasan*, parùm quidem pericè, ubi  $A D B, F G B$  diametris  $A C, E D$  rectè insistant, nempe  $(H-A) A D H + \text{recto } H D G + G D B (G-B) = 2 \text{ rectis. re-}$   
cta igitur ipsa  $A D B$ .

### Lemma II.

Fig. 262.

*Si semicirculum  $A B C$  à puncto  $D$  tangant rectæ  $A D, D B$ , & deducatur  $B E \perp A C$ : connexa  $C D$  ipsam  $B E$  bifariam secabit in  $F$ .*

a 31.3. & 13.1

b 18.3. & 28.

c cor. 36. 3.

d 9.1.

e 29.1. & 4.6.

f 14.5.

g cor. 32.1.

h ut modd.

k ax. 3.

l 6.1.

Occurrant invicem  $^b C B, A D$  protractæ in  $G$ , & jungatur  $A B$ .  
Quia (ob pares  $^c A D, D B$ ),  $^a A B D$  live  $^d B A D + D B G$   
 $= \text{recto } G B A^2 (A B C) = ^e B A D + G$ , erit  $G B D^k = G$ , &  
 $^f G D = (D B^h =) A D$ . Atqui propter parallelas  $A D, E B$ , erit  
 $D A. F E^e :: (D C. C F ::) G D. B F$ . Quare  $^f E F = F B$ .

### Note.

1. Paria heic peccavit Adnotator *Nasræus* atque in præcedente Theoremate; scil. è casibus summè obviis adduxit, quando Cathetus  $B E$  ad centrum circuli  $A B C$  pertineat.

2. Hinc, ut bene monet *Cl. Borellus*, investigare licet duo polygoni ordinata & similia, quorum circumscriptum inscriptum excessu quidem minori dato quovis superet, tum etiam rationem diametri ad circuli peripheriam compendio egregio eruere. Nam  $C E. C A :: B E. (A G) A D + D B$ ; hoc est, perimeter polygoni circulo  $A B C$  ex semilatore  $B E$  inscripti, ad perimetrum duplo laterum numero ex latere ipso  $A D + D B$  circumscripti. Chordas verò per seq. Lemma, atque etiam proportionem licet inter  $A C$  &  $C E$  magis semper magisque minuere, eoque rationem diametri  $A C$  ad semichordam  $B E$  elicere. Quippe hinc datur  $B E^q$ , & huic par  $A E^* E C$ , imò datur per Lemma, quod sequitur, ipsa  $A E$ . quare  $E C$  datur, atque etiam recta  $A D + D B$ . Idcirco ad peripheriam circuli (quæ quidem inter adscriptorum polygonorum ambitus mediat,) ratio diametri illicò emicat.

3. Horum Lemmatum Compiler, quisquis fuerit *Græcorum*, aut Scholiastes fortè *Arabs*, rectas  $A D, D G$  pares esse jubet, suo quasi fretus opusculo de Rectangulis, quod jam pridem periit. Istud tamen ex Elementis facillimè constat.

Lemma

Lemma III.

In circuli segmento ABC, à quovis curvæ puncto B ad basin AC agatur perpendicularis BD, fiantque DE = DC, & arcus BF = BC: annexa FA erit æqualis ipsi AE. Fig. 263.  
264.  
265.

Jungantur CB, BF, FE, EB. Est igitur  $\angle EFB = \angle FEB$ , propter æquales rectas FB, (BC) BE. Sed  $\angle AFB + \angle ACB = \angle GEB = 2 \text{ rectis} = \angle AEB + \angle CEB$ . Quare  $\angle AFB = \angle AEB$ , &  $(\angle AFB - \angle FEB) = (\angle AEB - \angle CEB)$ . Unde  $\angle AEF = \angle AFE$ . a 29. 3.  
b hyp. & 4. 1.  
c 5. 1.  
d 22. 3.  
e 13. 1.  
f ax. 3.  
g 6. 1.

Schol.

1. Hujus egregii Theorematis Casus secundus, ubi ABC est semicirculus, Cl. Ptolemaeo rectas olim circulo applicanti perneccarius erat Lemma tamen, quod *ἡ ἀρχή* appellatur, cap. 1x. Libri Primi Μετ. Σωφ. hac occasione non constat modò, sed & generale evadit.

Datis scil. tam chordis quam arcibus CA, AF, FC, adeoque semiarco BC, quæritur ipsa BC chorda. Demissa BD  $\perp$  AC, habes, ut priùs,  $DC = \frac{EC}{2} \left( \frac{AC - AF}{2} \right)$ . Fig. 264.

D vero rectus est, & BCD ex dato arcu (AC - CB) BA, etiam datus. Quare specie datur (per 40. Dat.) triang BDC. Dantur igitur ratione (3 def. Dat.) sed & magnitudine (2. Dat.) rectæ BC, CD.

2. Rursum socors esse mavult *Abul Hasan*; (istum enim *Διζευ* pravata insimulandum reor) & præter Authoris *Græci* ingenium, ommissis reliquis casum medium ostentare.

Lemma IV.

Super AC ejusque segmenta AD, DC describantur tres semicirculi ABC, AED, DFC, & fiat DB  $\perp$  AC: erit figura (ABCFDEA) trium semicircularum peripheriis interclusa, quam *Ἀσθεν* vocat Archimedes, circulo circa BD æqualis. Fig. 266.

Nam  $ADq + DCq + (AD \times DC \text{ Bis}) = DBq = ACq$ . a cor. 13, 17. 6.  
b 4. 2.  
c 2. 12.  
d ax. 7.  
Suntque circuli inter se, ut quadrata diametrorum. Quocirca semicirculus ABC æquatur circulo circa diametrum BD, una cum binis

e. ar. 3.

binis semicirculis AED, DFC: unde \* Arbelon *Archimedēum*, hoc est, semicirculus ABC minus semicirculis AED, DFC par omnino erit circulo circa BD describendo.

## Nota.

1. Cl. *Borellus* ista verbis suis adnotat.

“Hæc forsitan est una earum propositionum quas *Pappus* legit in libro antiquo de mensura *Arbeli*, seu spatii à tribus semicircumferentiis circularum comprehensi, ut ait *Proclus*: quæ quidem elegantissima est, ejusque inventionis Lunulæ *Hippocratis Chii* originem extitisse puto. Est enim *Hippocratis* Lunula superficies plana à quadrante peripheriæ circuli majoris, & semisse peripheriæ circuli subdupli comprehensa. Arbelus verò recentiorum est spatium à triente & à duobus sextantibus circumferentiarum trium circularum æqualium comprehensum; & hisce duobus spatiis facile quadrata æqualia reperiri possunt. At *Arbeli Archimedis* & *Procli* hucusque reperta non est quadratura; sed potest quidem assignari circulus prædicto spatio æqualis. Vide jam *Vietam in Responsis*.

2. Huic figuræ nomen dedit, ut par erat, cultellus seu scalprum Sutoris, quâ formâ semper fuit. Unde pervetus Glossa, “*Αρβηλον*, Sicilia: & Etyimorum Græcanicorum consarcinator, “*Αρβηλον* . *συνολον* *συνπλάνον* *σφαίρης*: *ἔστι δὲ καὶ* *σπλον*. Imò ante istos Scholiastes *Nicandri* paulò disertius, “*Αρβηλοι δὲ λίγροντι κυκλοτερεῖ σιδήρεια, οἷς οἱ σφυροτόμοι τέμνευσι καὶ ξέουσι τὰ δέματα*. Hæc tamen obiter; alia jam me *Mathesis* distinet. Interpreti autem Arabi *أربلوس* *Arbelus* dicitur tanquam de virilis generis voce *Gracæ*.

3. Hoc quartum Theoremâ ex *Pappi* inventis fuisse existimo, quo ad propositionem sequentem, quæ subtilissima est & Sene *Siculo* digna, via certior ampliôrque pateret: nec adeò *Hippocrati* *Chio* Meniscos quadrandi causam dedisse aliquam, quin ipsum potiùs abs antiquissimo illo Tetragonismo quàm opportunè ortum fuisse. Ait enim *Pappus*, quamprimum exposuerat Antiquam illam Propositionem, quæ proximum Lemmatum *Archimedeorum* facit, & quidem paulò ante decimum quartum Floridorum Theorematum Libri sui Quarti, (quod minimè discrepat ab hoc Lemmatio,) — *Διευθίσεται δὲ τὰ πρῶτα ἐν ἀμεταβάτῳ*.

Lemma

Lemma V.

Super AC ejusque segmenta quævis contigua AD, DC describuntur tres semicirculi ABC, AED, DEC, sitque DG ⊥ AC: pares invicem erunt circuli BHE, LFN, qui Arbelæ ABCD inscripti, tam perpendicularem GD, quam semicirculos contingant in punctis HEB, LFN. Fig. 267.

Duc diametrum HI: hæc autem æquidistet AC, ob rectam DHI = ADH, atque connexa BI + IA recta est. Tum convenient AB, DG in G, convenient etenim propter BAD + ADH < 2 rectis: adjuncta BH + HC, & recta est, & ad AG perpendicularis, atque IE ⊥ ED, & AE + EK etiam rectæ. Est autem GD ⊥ DA, & juncta CK + KA, quare producta CKG recta erit. Quoniam verò ED || CG, propter rectos AED, AKC, erit A D. IH :: (AG. GI ::) AC. CD, adeoque AD × DC = AC × IH, & argumento pari AD × DC = AB × LM. quantur igitur inter se diametri IH, LM, & circuli ipsi IHE, LFM. Q. E. D.

Scholium.

1. Sive Græcus ille, qui hæc Lemmata primus collegit, sive potius Arabum aliquis, quo CG rectam lineam esse ostenderet, citat Opusculum suum de Trigonis Rectangulis. Inde verò Ali Abu'l-Hafsan hoc adjumenti accepit. a. fig. 271. (sive schema primum Borelli, ad paginam. 393.)

BC ⊥ AG, quod in triang ABC per F occursum perpendicularium BE, CD tranſit. Junge DE. Circulus ADF ibit per E, ob rectum AEF. Æquantur autem DAF, DEF, atque DEB, DCB, hoc est, BAG, DCB, & B communis est. Unde AGB (CDB), = recto AGC. Recta igitur est CB, sive in schemate Archimedeo CG.

2. Deinde Adnotator Nasræus cæteros casus hujusce quinti Theorematis ad mentem Abi Sahl Cūbensis, percelebris Mathematici, hoc ferè modo exponit. Fig. 268.

Casus secundus. Vel semicirculi APN, OPC se mutuo secant in P. Sitque DP ⊥ AC: æquales invicem erunt circuli HEB, MFL, qui semicirculos & perpendicularem contingunt.

Fig. 268. *Æquidistant* H I, A C, & *agantur* A B, A H K \* *transfuentes* per  
 a lem. 1. I, E. atque *convenient* A G & D P in G. Dein *jungatur* recta <sup>b</sup> C K  
 b + K G, & I N + C B \* *transfuentes* per E, H.  
 c 31.3 : 28.1. Propter *parallelas* <sup>c</sup> C K N I, est <sup>d</sup> C A . C N :: (A G . G I ::) A D.  
 d 2.6. H I. adeoque <sup>e</sup> C N \* A D = C A \* H I. Verum C D \* D O =  
 e 16.6. <sup>f</sup> D P q = A D \* D N, atque <sup>e</sup> C N . D A :: (N D . D O ::) <sup>g</sup> C N.  
 f cor. 13. 17.6. O A. Quare <sup>e</sup> C D \* O A = D A \* C N <sup>h</sup> = C A \* H I. Pariterq;  
 g 19.5. C A \* L M = C D \* O A. Unde *quantur* & *diametri* L M, H I,  
 h ut prius. & *circuli* <sup>k</sup> M F L, H E I.  
 k ult. 1 : 2. 12.

*Casus tertius.* Vel *semicirculos* jam *disjunctos* A E N, O F C  
 tangant partes rectarum D F, D P : *quantur* *circuli* H E B, M F L, qui  
 tam *semicirculos* quam *perpendicularem* à *tangentium* *occurso* (D)  
*erectam* contingunt in *punctis* E, B, H, & F, R, L.

*Æquidistant* A C, H I, L M *diametri*, & *jungantur* C B, I N, re-  
 ctæque A H K, C G *transfuentes* per H, E, & K, quia \* C G || C N, erit  
 136.3. <sup>d</sup> A D . H I :: (A G . G I ::) A C . C N, adeoque A D \* C N = A C  
 \* H I. Ac pariter C D \* A O = A C \* L M. Est autem <sup>l</sup> C D \*  
 m 18.5. D O = (D Q q = D P q) A D \* D N, atque C D . A D :: (D N .  
 D O ::) <sup>m</sup> C N . A O. Quocirca A D \* C N <sup>e</sup> = (C D \* O A) <sup>h</sup> =  
 A C \* H I = A C \* L M = C D \* O A. Pares igitur *invicem* sunt  
*diametri* L M, H I, *circulique* <sup>l</sup> L F M, H E I.

### Lemma VI.

Fig. 270. *Circuli* E F B, qui *tres semicirculos* super A C, A D =  $\frac{r}{s}$  D C, &  
 ipsam D C *descriptos* *contingit*, *diameter* G H *diametro* A C *æquidi-*  
*stet* ; *quæatur* autem *proportio* *diametrorum* *ad* *invicem*.

Ductis rectis A G, G B, C H, H B, H E, E A, G F, F C,  
 item D G, D H, D I, D K, G L O, H M P, erit G O ⊥ A O, & H P  
 ⊥ A C.

Et (propter H G, D K, D I || A C, A B, C B) erit O P . P C ::  
 G M . M C :: A D . D C :: A L . L H :: A O . O P :: O P . P C, hoc  
 est,  $\frac{r}{s}$  P C . P C.

Unde aggregatum ex 3 continuè proportionalibus,  
 $\frac{r^2 P C^2}{s^2 P C} + \frac{r P C}{s} + P C . \frac{r P C}{s} :: A C . P O = G H.$



*Ex. gr.* (sic enim vult Arabs) sit  $PC = 4$ . Erit  $OP = 6$ ,  
 $OA = 9$ , adeoque diam.  $AC$ .  $GH :: 19.6$ .

*Adnotata in Lemma V & VI.*

§ 1. Lemmatum *Archimedis* quod putant, quintum ex *Pappi* inventis assumptisque transcriptum est, quâ arte illustrius esset id quod sequitur.

Præmonet adeò, priusquam ostenderet principem illam veterem-  
 què propter quam appellat ex vet. membran. Libro *IV*. Flori-  
 dorum *Prop. XIV*. eisdem posit. quæ in Schémate nostro 270, & ab  $\alpha$   
 deducta  $\alpha \mu \perp AC$  &  $= GO$ , esse  $\mu D . \frac{1}{2} HG :: AD - DC$   
 $. AD + DC$ .

Rectæ etenim sunt  $^a AEH, GED, CFG, DFH$ ; similiæque  
 trig.  $^b DEA, DOG$ , itemque  $DHP, DFC$ , quare  $AD . DE ::$   
 $GD . DO$ , &  $ADO = EDG$ : pariter  $DC . DE :: HD . DP$ ,  
 &  $CDP (= HDE = EDG) = ADO$ .

*a Lemma 1.*  
 $b 31, 3, 32,$   
 $1. \& 4. 6.$

Unde  $AD . DC :: PD . DO$ . & componendo convertendoque  $AC$ .  
 $AD - DC :: PO = GH$ .  $PD - DO :: P\mu = \frac{1}{2} GH$ .  $\frac{1}{2} PD - DO$ .

*Q. E. D.*

Syntheorema 1. Tum propter sim. trigona  $DOG, (DEA,) HPA$ ,  
 erit  $DO . OG :: HP . PA$ , &  $DO * PA = GO * PH = HPq =$   
 $Q: \alpha \mu$ .

2. Imò, quia  $CD . DA :: OD . DP$ , erit componendo  
 tam  $AD . AC :: PD . PO$  & diam.  $AD * (PO) GH = PD * AC$ .  
 quàm  $CD . AC :: OD . PO$ . & diam.  $CD * (PO) GH = DO * AC$ .

§ 2. Deinde *prop. XVII. l. 4.* quæ decimam sextam ejusdem  
 adjavat, ut  $DHq . HIq :: AC . CD$ . Ponantur eadem quæ in  
 Figurâ 267. fiatque  $IO \perp AC$ , Rectæ gr. sunt  $^n HEA, IED$ , &  
 propter ea  $CA * AO = ^a (coeuntibus D, P.) ADq . ^b AC$ .  
 $(AC - AD) DC :: AD . (AD - AO) DO = HI :: (oblim.$   
 trigona  $^c AED, HEI) DE . EI :: ^d DEq . EHq :: ^e DHq . HIq$ .

*a per preced.*  
 $b 17. 6 : 19. 5 :$   
 $c 34. 1. eff.$   
 $d 4: 6.$   
 $e 31. 3 : 29. 1.$   
 $f 22. 6.$   
 $g 8. 6.$   
 $h 10. 6.$   
 $i 18. 3.$   
 $k 31. 3.$   
 $l 12. 2.$   
 $m 19. 5 :$   
*n Lem. 1.*

Est etenim propter  $IHD$  rectum, &  $^k HE \perp DI$ ;  $^s DE . EH$   
 $:: HE . EI :: DH . HI$ .

Hinc statim constat horum Lemmatum quintum, viz.  $^1 AC . DC :: \odot$   
 circa  $DH$ .  $\odot$  circa  $HI$  pariter,  $AC . AD :: \odot$  circa  $DH$ .  $\odot$  circa  
 $L M$ . Æquaturque  $^m$  circuli ad  $HI$ ,  $L M$ . Quod ex *Pappo*  
 comprobatum volui.

§ 3. Propositio autem illa Antiqua & Archimedea, quam vocant, talis erat referente Pappo lib. 4. prop. XVI.

Tres semicirculos in spatio *Arbelico* tangat circulus  $G F H$ , ipsum verò binosque semicirculos alter circa  $N$  etiam tangat, atque ita porro. Erit  $\alpha\mu = GH$ , &  $QN = 2RI$ , &c. juxta naturalem numerorum seriem. (Ponantur ea quæ in Schem. 270.)

a § 1. sch.

b 16. 6.

c 17. 5.

d 19. 5.

e 17. 6.

f ult. 1.

g 34. 1.

h 15. Papp. l. 4. Et sic deinceps.

1° Equantur  $\triangle CAO$ ,  $\triangle PAD$ , atque  $\triangle ACP$ ,  $\triangle OCD$ , unde  $^b AD$ .  $AC :: AO. AP$ , necnon  $AC. CD :: OC. CP$ . Quare,  $^d AO$ .  $(PA - AO) OP :: AD. DC :: OP. PC$ , &  $^e OPq = AO * PC = Q: \alpha\mu$ . Ergo  $^f \alpha\mu = (OP)^g = GH$ .

2° Et, quia  $^h \frac{\alpha\mu + GH}{GH} = \frac{NQ}{RI}$  erit  $QN = 2RI$ .

9. 10.

3. Quinimò si fuerint  $AC$ ,  $DC$  in fig. 267. inter se sicut numeri quadrati, erit  $DH$  communisurabilis diametro  $HI$ , aliàs non. Nam per § 2 universè,  $\frac{AC}{CD} = \frac{DFq}{HIq}$ . Sit igitur  $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{1}$ , erit  $DF = 2HI$ : pariter  $QN = 3RI$ , &c. juxta vulgatissimam numerorum consequentiam.

4. Quæ est Pappi propositio *XVIII*. Manifestum etiam est, si circuli  $f, g, b$ , & semicirculos  $ADE$ ,  $ABC$ , seque invicem retigerint, fueritque Cathetus  $fn$  æqualis radio, fore  $g^o = 2g^i$ , &  $^b p = 5bq$ , &c. juxta numeros deinceps impares. Nam per § 3.  $\frac{fn + 2fn}{diam.} = \frac{g^o}{2g^i} = \frac{1}{2}$ , &  $g^o = 2g^i$ , &c. (vide fig. 282. sive illam Pappi ad *XVIII* pr. lib. 4.)

### Lemma VII.

Fig. 272.

Circulus  $ABC$  quadrato  $AC$  circumscriptus duplus est inscripti circuli  $EHG$ .

a 34. & ult. I

b 47. 1.

c 2. 12.

Ductâ etenim diametro  $EG \parallel BC$ , erit diam.  $BDq^b = (2BCq)$   $2EGq$ , & circulus circuli duplus.

Adnotat *Abul Hasan Nasravan*, tanquam ex libello quem de Circulo fecit, trium illud,

Vis  $\frac{r}{s}$  polygoni sive circuli dati  $EHG$ . Habes latus aut diame-

trum

trum  $EG$ , &  $\frac{r}{s} EG$ , necnon (per 13. 6.) quadratum par restan-  
gulo  $\frac{EG^2 r}{s}$ . unde,  $EG. \frac{EG r}{s} :: EG^2. \frac{EG^2 r}{s} :: ^c$  circulus datus  
quæsito :: per 20. 6.

Lemma VIII.

In circuli secante  $AC$  statuatur  $BC$  par radio, & per circuli cen. Fig. 273.  
trum  $D$  agatur  $CE$ : arcus  $AE$  triplus est ipsi  $BF$ .

Ductis enim  $EG \parallel AB$ , radiisque  $DG, DB$ : erit  $DGE^a =$   
 $DEG \left( \frac{GDF}{2} \right)^c = C^a = FDB^d = \frac{1}{3} GDB$ , & arcus  $BF^e =$   
 $(\frac{1}{3} BG)^f \frac{1}{3} AE$ , ob  $AGE^c = GAB$ . unde constat propositum.

Alf. Borell. hoc fermè modo. Adjunctâ  $EB$ , erit  $(BDC)^a C =$   
 $2 DEB^a (E + EB D)$ : unde  $ABE^b = C + E^s = 3E$ , & ar-  
cus  $AE^c = 3BF$ .

Quod in hoc theoremate ponitur, datæ peripheriæ *τετραπλάσιον*,  
quod vides, inducit, atque ita Geometriam planam, ut ritè construa-  
tar, omnino superat. Id tamen facili opere præstat *Solida*, multoque  
adhuc plura *Linearis* quam vocant.

Lemma IX.

In circulo binæ quævis chordæ  $AB, CD$  sese ad angulos rectos se- Fig. 274<sup>a</sup>  
cantes, intercludunt arcus  $AD + CB$ , pares archibus  $AC + DB$ . <sup>a 3. 3.</sup>

Agatur diameter  $EF \parallel AB$ , est igitur  $GD^a = GC$ ,  $AE^b = BF$ ,  
&  $AE + AD^c = EC$ . unde semicirculus  $CF + EA + AD =$  <sup>b cor. 26. 3. & constr.</sup>  
 $CF + FB + AD^c = AC + DB$ . <sup>c cor. 28. 3. d ax. 1. def. 17. e ax. 7.</sup>

Lemma X.

Circulum  $AEB$  tangent rectæ  $CA, CB$ , secant verò  $CD$ , & huic Fig. 275.  
parallela  $BE$ , & connexa  $AE$  secanti  $CD$  conveniat in  $F$ : Cathetus  
 $FG$  bisecabit ipsam  $EB$ .

Junge  $AB$ , est igitur  $CAB^a = (AEB)^b AFC$ , &  $D$  com- <sup>a 32. 3. b 6 cor. 31. 29. 3. c 32. 1. 4. 6.</sup>  
munis utrique triang<sup>b</sup>  $CAF, AHC$ ; unde  $FC. CA :: CA. CH$ ,  
&

a 17. 6.

e cor. 36. 3.

f cor. 17. 6.

g 6. 6.

h 5. 1.

k ax. 1.

l 26. 1.

&  $^d F C \cdot C H = C A q^c = C B q$ . Quia  $^f$  verò  $F C. C B :: C B$ ,  
 &  $^g D$  communis, erit  $^g C F B = ^g (C B H^h = G A B^k)$   
 $A F C$ . Sed  $(C F A) F E B^k = F B E^b (C F B)$ , angulique  $^l$  ad  $G$  re-  
 cti, atque latus  $G F$  commune; quare  $E G^l = G B$ .

## Lemma XI.

Fig. 276.

*Circuli diameter A F potest quadrata ex segmentis binarum chordarum AB, CD, sese ad angulos rectos secantium in E.*

a ax. 12 31. 3.

b 27. 3.

c cor. 32. 1.

d 26, 29. 3.

e ult. 1.

f 47. 1.

g cor. ult. 6.

Jungantur  $A C, A D, C F, D B$ . Propter  $A E D^a = A C F$ , &  
 $A D C^b = A F C$ , erit  $C A F^c = D A E$ , & tam curva quam re-  
 cta  $C F^d = D B$ . Unde  $A F q^f = C F q^c (D B q) + A C q$ , hoc  
 est,  $^f D E q + E B q + A E q + E C q$ .

## Schol.

*Ali Nasvæus* hoc modo: annexis  $A D, D B, B C$ . In triangulo  
 $D E B$ ,  $E = \text{recto}^c = B + D$ , & arcus  $D A + B C^g = \text{semicir-}$   
 culo. Potest ideo diameter utraque  $^d D A q + B C q$ , hoc est, qua-  
 drata ex  $A E, E D, E B, E G$ .

## Lemma XII.

Fig. 277.

*Semicirculum tangent CD, DE, restaque CG transeat per F intersectionem subtensarum DB, EA, qui tactus D, E, & diametri terminos A, B connectant. Erit CG  $\perp$  AB.*

a 31. 3.

b cor. 32. 1.

c 2 ax.

d hyp. &amp; 32. 3.

e ax. 1.

f schol.

g 5. 1.

Junge  $D A, E B$ . Erit ang.  $^a$  rectus  $A D B^b = D A B + D B A$   
 $= B E F$ . Et  $(C D B)^d D A B + A B F + F B E = D A B +$   
 $(C E F)^d A B E^c = B E F + F B E^b = D F E^c = C D B + C E F$ .  
 Unde  $C F^f = C D$ : atque est  $D A G^d (C D E^g = C F D) +$   
 $D F G = 2 \text{ rectis} = ^a \text{recto} (A D F) + F G A$ . Quare  $^k C G \perp$   
 $A B$ .

## Schol.

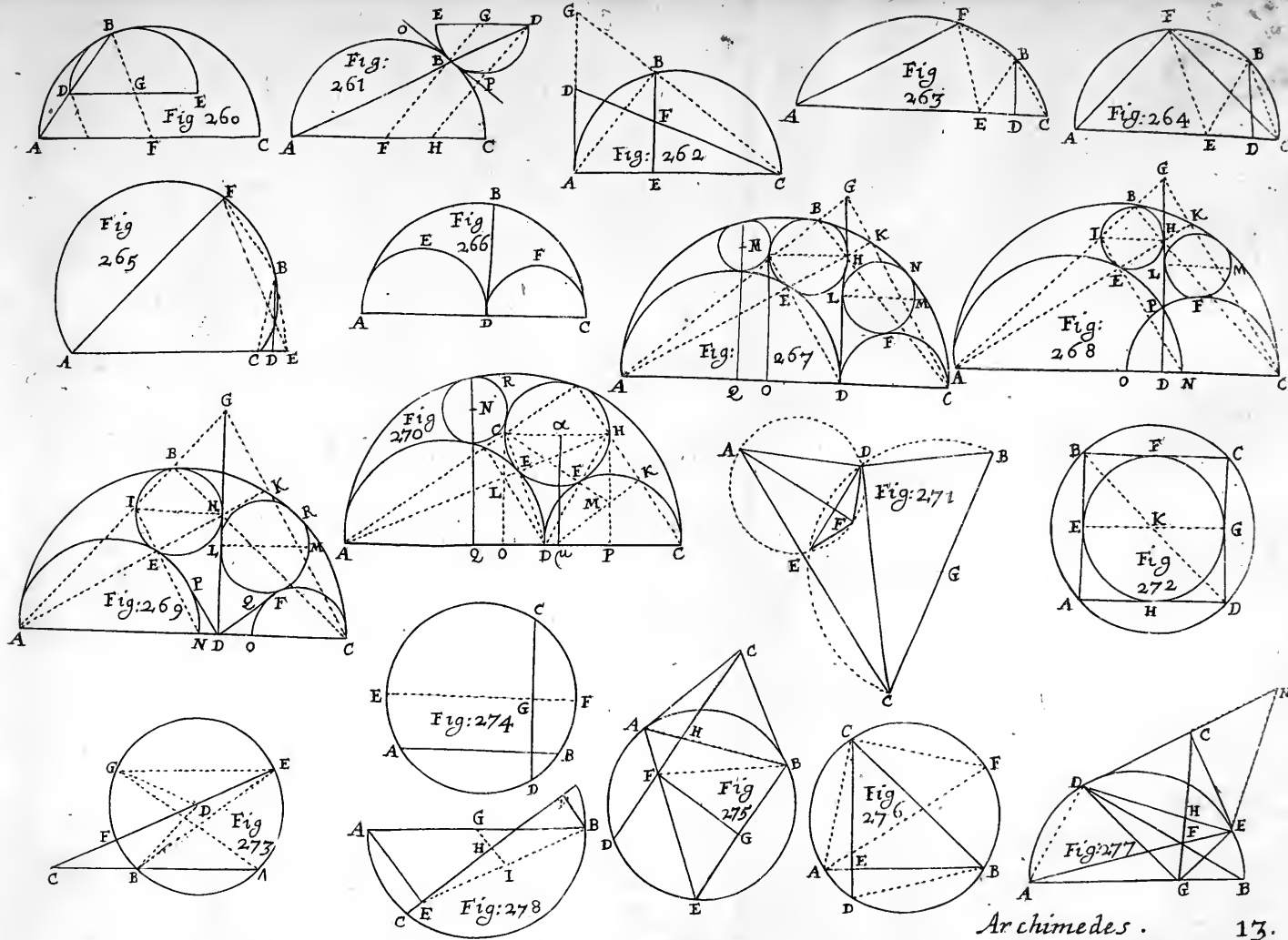
1. In Demonstratione ut pares sint  $C F, D C$ , provocatum est ad  
 opusculum, quod hodie nusquam est, de *Tetrapleuris*: supplet tamen  
 τὸ ἐλλειπὲς *Abu'lHasan* Adnotator hunc in modum.

Vis  $C F > D C = C H$ . Est igitur (connexis  $D H, H E$ ,)  $C D H$   
 $\geq$  seu  $D H C^b > D F C$ , &  $C E H$  sive  $C H E^1 > C F E$ : quare  
 $D H E$

h 13. 1.

k 10 def. 1.

l 16. 1.





$DHE = CDH + CEH$  majore  $CDF - CEF$ , pars toto:  
Rursum ais  $CF < DC = CG$ . Erit pariter (juncti  $DG, GE$ ),  
 $DGE$ , hoc est,  $CDG + CEG$  minor  $CDF + CEF$ , totum  
parte. Ergo  $CF = CD$ .

2. Cl. Borellus Methodo idem directâ commonstrat, hâc puta.

Fac  $CN = CE$ , & adjuñge  $NE$ . Anguli igitur <sup>m</sup> plani  $NDFE$  m sch. 32. 1.  
valent quatuor rectos, atque anguli <sup>n</sup> oppositi  $EFD$  ( $CDF + CEF$ ) n ax. 3.  
 $+ N^s(CEN) = FDN + FEN = 2$  rectis. Quare circulus o 19. 3.  
ex centro  $C$  (ob  $^o CN = CE = CD$ ) plano  $NEFD$  circum- p 22. 3.  
scriptilis <sup>p</sup> auferet <sup>q</sup>  $CF = CD$ . q def. 15.

### Lemma XIII.

Cateti  $AE, BF$ , à diametri circularis extremis  $A, B$  cadentes, Fig. 278.  
exsecante à diametro  $CD$  segmenta  $CE, FD$  invicem equalia auferunt.

Junge  $EB$ , & per centrum  $G$  adige  $GI \parallel AE$ , quæ bifecat <sup>a</sup>  $CD$  a 3. 3: 30. 1.  
& æquidistat ipsi  $BF$ . Erit (ob  $AG = GB$ )  $EI^b = IB$ , & b 2. 6.  
 $EH^b = HF$ . Et  $HD$  ( $HC$ ) minus  $HE$  æquales ipsi  $FD^c = FE$ . c ax. 3.

### Lemma XIV.

Super  $AB$  ejusque paria segmenta  $AC, DB$ , atque sub interseg- Fig. 280.  
mento  $CD$  describantur quatuor semicirculi, & per  $E$  centrum cir-  
culorum  $AFB, DGC$  pertrahatur,  $FG \perp AB$ : Circulus circa  
 $FG$  equalis est figuræ curvilinea  $AFBDGCA$ , quam Salinon  
appellat Archimedes.

Sunt enim diam.  $FGq^d(DAq) + CAq^2 = 2DEq^b(CEq)$  a 10. 2.  
 $+ EAq^c = \frac{1}{2}ABq + DCq$ . Panterque <sup>e</sup> ipsi circuli Quare b hyp. & ult 1.  
<sup>f</sup> semicirculi super  $AB, DC$ , æquantur circulis ad  $FG, CA$ . Et c hyp. & 4. 2.  
<sup>g</sup> Circulus ad  $FG$  minus illo ad  $AC$ , hoc est minus paribus semi- d 15. def.  
circulis super  $AC, DB$  æqualis est Salino, sive figuræ à quatuor e 2. 10.  
semicirculis  $AB, BD, DC, CA$  conclusæ. f ax. 7.  
g ax. 3.

Nota.

(Salinon) sive σελινιον Luna est, quatenus vultu planissimæ  
suo apparet, hoc est, μηνονδής. Unde nomen antiquitus erat  
puerorum amuletis.

Lemma

## Lemma XV.

Fig. 281.

In semicirculo ACB, sit CB chorda Pentagoni & recta CD per arcus CA punctum medium D transiens diametro AB producta occurrat in E, atque connectatur D A Cathetus FG auferet GF semidiametro circuli parem.

Jungantur CA, GD, DB, & è centro HD. Est igitur (ob  $\angle CAB = \frac{2}{5}$  recti)  $CAD^b = DAB = \frac{1}{5}$  recti : utque (2 DAH)  $d DHB = \frac{2}{5}$  recti. Sed rectus  $C^c = G$ , & FA commune, quare (in trigonis ACE, GAF)  $AC = f AG$  : necnon (in trigonis ACD, AGD) ob pares angulos ad A, AD commune, & AE = AG, erit  $f ACD = AGD = \frac{5}{3} \cdot 2$  recti.  $= \frac{10}{3}$  recti. atque  $ACD = b DBE$ , &  $DBA^k = DG B$ . Unde  $DB = l DG$ .

Item quia  $DHG = \frac{2}{5}$  recti, &  $DGH = \frac{6}{5}$  recti, erit  $HD G^i = \frac{2}{5}$  recti, &  $DG^l = GH$ .

Postremò quoniam (in triang. EDB, HDG)  $BDE^h = (CAB^a = \frac{2}{5}$  recti)  $G D H$ , & utprius  $DGH = EBD$ , &  $DB = DG$ , erit  $E B^j = GH$ , &  $EG^m =$  radio BH.

## Coroll. I.

Annexis CH, CG, erunt ACE, HDE, & HCG, GDB trigona isoscelia & similia, similiterque posita & ad bases secta, Nim. duas quintas recti æquant hinc HCB, HCG, GCE, inde EDB, BDG, GDH.

## Coroll. II.

Liquet insup. EC (= CA, chorda  $\frac{1}{10}$  totius circuli) divisam esse in D mediâ ac extremâ ratione, cujus segmentum majus ED (= radio DH, ob  $DBE = DGH$ ) est latus hexagoni ordinat circulo ACB inscribendi, minusque DC decagoni, per 9, c. 13. pariterque juxta mediam extremamque rationem sectas esse EG in B, BH in G, & EH tam in B quàm G, EA denique in centro H. Deinde æquantur eam ECB tum  $\frac{1}{2}$  GCE parti quintæ recti.

Binæ prop. quæ sequuntur in editione Florentinâ ad indubium æternumque opus Archimedis de Spherâ prorsus pertinent. Codices etenim Arabici in 15. Lemma omnes desinunt.



## ARCHIMEDIS XAMMITHE

SIVE

*Liber de Arenæ numero.*

**A**rbitrantur nonnulli, rex *Gelo*! arenæ numerum infinitum esse. Dico autem non solum ejus, quæ est circa *Syracusas* reliquamque *Siciliam*, sed etiam quæ in omni regione habitabili pariter atque inhabitabili continetur. Sunt Autem alii, qui non illum quidem infinitum putent, sed nullum dari denominatum numerum posse credant qui illius multitudinem exuperet.

Itaque eos qui ita opinantur, si ejusmodi arenæ molem animo comprehenderent, cujusmodi esset, si universa terra, repleto in eâ mari & cavitatibus omnibus, altissimorum montium vertices exequaret; atque hujus ipsius rursus alterum multiplicem excogitarent, monime dubium est existimatuos illius multitudinem numeros longe omnes, multumque superare. Ego verò id ostendere conabor demonstrationibus Geometricis quas tu ipse assequeris: eorum videlicet numerorum, qui à nobis expressi traditque sunt in iis, quæ ad *Zeuxippum* Scripsimus, nonnullos non solum arenæ multitudinem superare, quæ terræ undique repletæ ut diximus æqualis esset, sed etiam quæ ipsi mundo parem haberet magnitudinem. Non enim ignoras mundum à compluribus Astrologis appellari Sphæram, cujus centrum quidem est terræ centrum, semidiameter autem est æqualis lineæ inter centrum solis & centrum terræ interjectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Astrologis scripta sunt, redarquens *Aristarchus Samius* positiones quasdam edidit, ex quibus sequitur Mundum proximè dicti mundi multiplicem esse. Ponit enim stellas inerrantes atque solem immobiles permanere, terram ipsam circumferri circa solem secundum circumferentiam circuli, qui est in medio cursu constitutus; sphæram autem inerrantium stellarum circa idem centrum cum sole sitam, tantâ esse magnitudine, ut circulus secundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad distantiam stellarum fixarum, quam centrum Sphæræ habet ad superficiem. (Vide *Copernic. revol. l. 3. c. 15.*) Id verò manifestò constar fieri non posse. Quoniam enim Sphæræ centrum nullam

habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad sphaeræ superficiem existimandum est. Quare credibile est *Aristarchum* ita intellexisse, utputa in *hypothesium primâ*, &c.

Suis igitur numeris notisque (capto sanè perfacilibus) ut exhiberet *Senex* ille *Siculus* quantum *arenarum* capiendo esset fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo plusculum, hæc ante cætera poni voluit.

### *Hypotheses.*

1. Est secundum *Aristarchum*, qui inter sphaeras fixarum solisque quàm inertes & defixas globum nostrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Astronomorum *Mundus* fuit,) ita iste. ad orbem fixarum: Fiatque adeo horum diametris ἀνάλωγον, per 18. c. 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 stadiorum esse comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis esse *Archimedes* αἰαμφιλόβη ἐνεκεν) haud superet trecentas stadiorum Myriadas, sitquæ ita (per Cyclometrica *Archim.*) diameter terrestris minor quàm stadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur solis diameter & terrestri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem asseruerat, *Phidias* quæ duodecuplam: & demonstraverat sanè *Aristarchus* (prop. 9. libelli aureoli qui adhuc adservari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui esse plusquam ipsius octodecuplām.

### *Observationes.*

1. *Aristarchus* quidem capto solis angulo visuali (quâ in re & manus & visus & organa nimium fallere solent,) aiebat solis discum partem Zodiaci vigesimam & septingentesimam subtendere: Veruntamen *Siculus* noster, quoniam Problema suum subtilius eo quicquam haud postulat, observavit binos modò angulos, alium quidem angulo solis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat observandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ super palum versatilis jaciatur Cylindrus, solis jam exorti oppositos solum margines visui ad extremum regulæ posito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò visu Cylindrum tangentes, major fuerit visuali solis angulo si visio

visio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi prius erat visus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrum tangant binæ rectæ, eæ accursu suo angulum efficiant minorem angulo solis visuali, cum utrinque aliquid solaris disci compareat. Cæterum magnitudo visu non minor hac arte investigatur: Sumantur duo Cylindri bene tornati, tersi, & æquè crassi, quorum alter sit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè statuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis distet; siquidem viso non-albo albus juxta varia intervalla promotus dispareat, magnitudo paris crassitudinis cum Cylindris istis non minor erit diametro visûs, quod supra requirebatur. Ubi denique Cylindrus in crenâ regulæ collocatus totum solis discum à visu penitus abripit, rectæ quæ à visu ducuntur Cylindrum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem  $\angle$  solis visuali. Ita autem deprehensus est angulus solis visualis major esse  $\frac{1}{200}$  recti anguli, minorque  $\frac{1}{164}$  recti: Modos tamen alios stellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in *Almag.*

2. Observatum est 25 papaveres (*μικρὰς*) in rectam lineam dispositos longitudinem digitalem superare.

Sit tamen, majoris evidentiae ergo, diameter papaveris haud minor quam digiti pars quadragesima: atque constet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

### Lemmata.

1. Solis diameter major est latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inscripti.

Plano per terræ centrum *b*, visumque *d* secentur, sole jam exorto, Fig. 283<sup>1</sup>  
Orbis annuæ revolutionis, terra ipsa, & Sol secundum circulos  
*abc*, *def*, & *fg*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*, itemque *hr*,  
*hq* secantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem  
stingit,  $\angle hdk$  rectus est, exceditque  $\angle$  terrestrem diameter solis,  $\angle$  a 18. 3. Com-  
erit sole jam prorsus elevato,  $\angle hdk$  obtusus,  $\angle$  &  $h k \sqsubset dk$ , mandini.  
nec non  $rhq$  ( $\angle$   $ndt$ , angulo solis)  $\supset \frac{1}{164}$  recti: adeoque recta  $b$  hyp. 3. pag.  
*ab*  $\supset$  subtensâ  $\frac{1}{4 \times \frac{1}{164}}$  circuli *abc*. Atqui perimenter 656-goni. c 32, 19. 1.  
*kb* ::  $\supset 44.7 :: \supset 656.104 \frac{1}{11}$ , atque adeò latus 656-goni. *kb* d 24 opt. Aucl.  
e Observ. 1.  
f cor. 33. 6.  
::  $\supset 1.104 \frac{1}{11}$ : quare  $\frac{b a}{k b} :: \supset (\frac{1}{11} \frac{1}{48}$ , i. e. in integris, ::  $\supset$ )

g Ptol. Alm. l.  $\frac{1}{100}$ : atque  $ba$  multò  $\supset \frac{bk}{100}$ . est autem  $ba$  diameter circuli  $fg$   
 1. c. 9.  
 h 13. 5.  
 i 6. 1.  
 k 28. 5.  
 l 15. def. 1.  
 m 3. 18. 3.  
 n 4. 6.  
 o 9. 5.  
 p hyp. 3.  
 q 8. 5.  
 Fig. 284.  
 r Cor. 16. 3.  
 s 4. ax.  
 t ut prius.  
 u Cor. 37. 3. &  
 15. 5.  
 x 12. 28. 1.  
 y sch. 31. 3.  
 z 33. 6.

quippe (ob  $aub$ ,  $bkr$ , rectos  $m$  &  $h$  communem) est  $^n bk \cdot ha$ .  
 $= bk :: kr \cdot au$ : unde  $^o kr = au$ , & diameter ( $= 2kr$ )  
 $= ab$ ; Estque  $^2 2hy \supset ab$  five  $2ks$ , unde  $hy \supset ks \supset \frac{1}{100} bk$ ,  
 & reliquum  $ys \supset \frac{2}{100} bk$ , adeòque  $bk \cdot ys :: \supset 100$ . 99.  
 Quia autem tam  $br^c \supset bk$ , quam  $ys \supset dt$ , (Scil. junctis  
 $dy$ ,  $st$ , obtusi sunt  $<^1 dyz$ ,  $zst$ , &  $^c dz \supset yz$  necnon  $zt \supset zs$ ,  
 eòque  $ys \supset dt$ .) erit  $\frac{br}{dt} (:: ^q \supset \frac{br}{ys} :: \supset \frac{bk^t}{ys}) :: \supset \frac{100}{99}$   
 Præterea in trigonis rectangulis  $bkr$ ,  $dkt$ , quia  $kr = kt$ ,  
 ac  $br$  ( $hq$ )  $\supset dt$ , erit angulus  $^d$  major  $tdk \cdot rhk ::$   
 $\supset bk \cdot dk$  [Compositis etenim ad rectos trigonis  $ktd$ ,  $kbr$ ,  
 $\supset hr \cdot dt$ .  
 sit  $df = bk$ , &  $^x fi \parallel kr$ , circuli igitur pares circa pares diametros  
 $df$ ,  $bk$ ,  $y$  transibunt per  $i$ ,  $r$ , eritque  $\leq \frac{fdi}{rbk} (:: ^z \text{ arcus } fi :: ^s$   
 $\leq rbk$  ( $:: \text{ arcus } kr$ ).

Fig. 285.  $:: \supset \frac{\text{recta } fi}{\text{rect. } kr} :: \supset \frac{(fd) kb}{kd}$  Vel Componantur triangula ista  
 ad acutos,  $b, d$ , & centro  $d$ , intervallo  $do$ , describatur circulus  
 $pog$ . Erit igitur  $\leq \frac{kdo}{odt} (b.e. \frac{\text{sector } pod}{\text{sect. } ogh} :: \supset ^q \frac{\text{sect. } pod}{\Delta oth})$   
 $:: \supset ^q \frac{\Delta k o d}{\Delta o t h}$  five  $\frac{ko}{ot}$ ; & componenti,  $\leq \frac{kdt}{kbr} (:: \supset ^k \frac{(kt)kr}{ot})$   
 $^a :: \supset ^c \frac{br}{dt}]$

Inde  $^v \frac{ndt}{rbk} (:: \supset \frac{br}{dt})$  multò  $:: \supset \frac{100}{99}$ . Tum, quia  $ndt$  (ma-  
 jor  $\frac{1}{200}$  recti)  $rbq :: \supset \frac{1}{200} \cdot \frac{200}{99}$ ,  $b.e. 1001.99$ , est  $rbq$   
 ( $\supset \frac{200}{99}$  recti,  $b.e. \supset \frac{1}{200} \cdot \frac{99}{99}$  recti) multò  $\supset \frac{1}{200}$  recti.  
 Solis igitur diameter  $ba$  major est subtensâ parti  $\frac{1}{81\frac{1}{2}}$  circumferentiæ  
 totius, & adhuc major subtensâ  $\frac{1}{1000}$  circumferentiæ seu latere  
 Chiliagoni Orbitæ  $\epsilon\pi\alpha\nu\sigma\iota\alpha$  inscripti.

## Coroll.

a 21. 1

b Cor. 15. 4.

Hinc autem sequitur, quia ambitus Chiliagoni, (qui quidem  
 a excedit tres diametros Orbitæ annuæ cui inscribitur, cum vel  
 ambitus hexagoni  $\beta$  æquet tres diametros sui circuli,) minor est mille  
 diametris

diametris solis, & adhuc minor tricies mille diametris Lunæ aut terræ, Diametrum Orbis revolutionis annuæ (quem mundum vocant, minorem esse decies mille diametris terræ, multoque minorem γ. centrum Myriadibus myriadum stadiorum, sive γ <sup>hyp. 2.</sup> 10000 × 1000000.

2. Τὰν αἰθρῶν πατρὸς αἰθρῆς.

Novem primi gradus seu Periodi ab unitate in ratione decuplâ (quæ ad præsens institutum abundè sufficit) progredienti vocentur Numeri Primi: & gradus octo præter unitatem Octas Prima. Isti verò numeri commodè satis exprimi solent, notis puta distinctis ad Myriades & ad Myriadum Myriades notis illis repetitis. Dein novem gradus, qui proximè sequuntur incipiendo à nono seu ultimo gradu, numerorum primorum, appellentur Numeri Secundi necnon octo ipsius gradus excepto itidem primo, Octas secunda: Atque ita porro

3. Si numeri ab unitate proportionalis fuerunt, ut  $\frac{1}{\text{seu } 1. b. b^2} = \alpha. \beta. \gamma.$

$\delta. \epsilon. \zeta. \eta. \theta. \iota. \kappa. \lambda.$  & aliqui  $\delta, \theta$  ex eadem analogiâ sese multiplicaverint, factus inde numerus ( $\delta \times \theta =$ )  $\chi$  æqualis erit ipsi  $\lambda$ , qui tantum distat à  $\theta$  majore multiplicantium, quantum minor ab unitate in eadem analogiâ.

Quippe  $\frac{\alpha. \beta. \gamma. \delta. \epsilon. \zeta. \eta. \theta. \iota. \kappa. \lambda.}{\beta. \delta. \iota. \lambda} & \alpha. \delta. :: \theta. \lambda$ : quare  $\theta \lambda$  seu  $\chi = \alpha \lambda$  <sup>a hyp. & 14. 7.</sup>  
 $= \epsilon \lambda$ . Patet etiam  $\lambda$  — distare ab unitate quantus est numerus <sup>b 19. 7.</sup>  
 ex utrisque conflatus, quibus se invicem multiplicantes  $\delta, \theta$  ab unitate <sup>c 5 ax. 7.</sup>  
 absunt: Sunt equidem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$ , quot ipse  $\theta$  ab unitate distat, at  $\iota, \kappa, \lambda$ , sunt uno minores, quàm quibus  $\delta$  distat ab unitate: etenim unà cum  $\theta$  totidem erunt.

His igitur partim positis, partim verò demonstratis, quod jam propositum est; ostendemus.

### Propositio Princeps.

Arenæ numerus, quæ magnitudinem obtineat æqualem Sphæræ stellarum inerrantium ab *Aristarcho* positæ, minor est mille Myriadibus octavorum, quos vocamus, numerorum, tantum abest ut sit vel infinitus vel ineffabilis.

Quia diameter papaveris est ad digitum :: ( $1. 40^a :: 40. 1600$  <sup>a Observ. 2.</sup>  
 $::$ )  $1600. 64000$ ; Sphæra ex diametro digitali non <sup>b 18. 2.</sup> continebit  
 plusquam 64000 papaverum globosorum, sive <sup>a</sup> arenarum  $64000 \times$   
 $10000,$

10000, hoc est, sex myriades myriadum quatuorque myriadum millia  
 = sex  $n^{ii}$  — quatermillibus myriadum  $a^i$ : atqui — decem  $a^{ii}$ . Nu-  
 merus autem arenarum, quas capit sphaera ex diametro centum digi-  
 torum, adeoque  $b$  sphaeræ ex digitali diametro multiplex centum my-  
 riadibus, minor est 1000000  $\times$  decem  $n^{ii}$ , hoc est, minor mille my-  
 riadibus  $a^{ii}$ : Nam 10  $a^{ii}$   $\times$  1000000, qui fit ex 10  $n^{ii}$  termino de-  
 cimo ab unitate in ratione decuplâ, & ex 1000000 termino septimo  
 erit progressionis istius terminus decimus sextus; octo autem primi  
 termini pertinent ad  $n^i$ , & octo sequentium ultimus valet mille my-  
 riades  $\mathcal{N} n^{ii}$ . Rursus numerus arenarum, unâ cum monade quibus con-  
 stat sphaera ex diametro decies mille digitorum, qui quidem stadium  
 superant, hoc est, sphaera  $b$  centum myriadibus multiplex sphaeræ ex  
 diametro digitali, minor est 1000000  $\times$  mille myriades  $n^{ii}$ , hoc est,  
 minor decem myriadibus  $\mathcal{N} n^{ii}$ , sive progressionis istius termino  
 (16+7—1=<sup>c</sup>) 22<sup>do</sup>, quandoquidem octo primi termini cum uni-  
 tate pertineant ad  $n^i$ , octo sequentes ad  $n^{ii}$ , & cæterorum sex ultimus  
 designat in decem myriades  $n^{iv}$ . Numerus etiam arenarum, quibus re-  
 pletur sphaera centum stadiorum diametrum habens adeoque sphaeræ  
 ex diametro unius stadii multiplex myriadibus centum, minor erit  
 1000000  $\times$  decem myriades  $n^{iii}$ , sive progressionis termino (22+  
 7—1) 28<sup>vo</sup>, hoc est, minor mille unitatibus  $\mathcal{N} n^{iv}$ . Pariter sphaera  
 ex diametro denum millium stadiorum, adeoque sphaeræ centum sta-  
 diorum diametrum habentis multiplex centum myriadibus, continet  
 arenarum numerum minorem 1000000  $\times$  1000 unitates  $\mathcal{N} n^{iv}$ , sive  
 termino progressionis (28+7—1) 34<sup>to</sup>, hoc est, minorem decem  
 unitatibus  $\mathcal{N} n^v$ . Dein sphaera ex diametro centum myriadum sta-  
 diorum continet arenas pauciores quàm 1000000  $\times$  10 unitates  $\mathcal{N} n^v$ ,  
 seu quantitatem termini 40<sup>mi</sup>, hoc est, pauciores quàm mille my-  
 riades  $\mathcal{N} n^v$ . Item sphaera ex diametro decies mille myriadum sta-  
 diorum habet arenarum numerum minorem 1000000  $\times$  mille my-  
 riades  $\mathcal{N} n^v$ , seu termino 46<sup>to</sup>, hoc est, minorem myriadibus decem  
 $\mathcal{N} n^i$ : Et sphaera ex diametro centum myriadum myriadum stadio-  
 rum, quæ  $d$  orbis annui diametro major est continet arenarum nu-  
 merum minorem 1000000  $\times$  myriades decem  $\mathcal{N} n^{vi}$ , sive termino  
 52<sup>do</sup>, hoc est, minorem mille unitatibus  $\mathcal{N} n^{vii}$ . Ergo mundus  
 veterum Astrologorum seu orbis revolutionis annuæ non capit tot  
 arenas quot sunt mille unitates  $\mathcal{N} n^{vii}$ . Denique numerus arenarum  
 quæ repleant fixarum sphaeram *Aristarchicam*, minor est mille my-  
 riadibus  $\mathcal{N} n^{viii}$ . Quoniam enim diametri terræ, mundi Astrolo-  
 gorum, orbisque fixarum fuit  $\div\div^c$ , ostensaque est diameter mundi  
 istius

c Lemma 3.

d Cor. lem. 1.

e Hyp. 1.

istius minor 10000 diametris terræ, erit etiam fixarum orbis diameter minor 10000 diametris mundi, & fixarum orbis <sup>b</sup> minus decies millies decies mille myriades mundorum: unde numerus arenarum, quas continebit sphaera æqualis fixarum orbi juxta *Aristarchum*, minor erit 1000000000000 × mille unitates  $\mathfrak{N}^{\text{vii}}$ , sive progressionis termino  $(13 + 52 - 1) 64^{\text{to}}$ , qui est gradus octavus  $\mathfrak{N}^{\text{viii}}$ ; minor mille myriadibus  $\mathfrak{N}^{\text{viii}}$ . Patet ergo propositum. Hæc autem, rex *Gelo*! quamplurimis quidem, qui Mathematicis instructi non sunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis verò qui ea didicerunt, & circa distantias & magnitudines terræ, solis, mundique totius elaborarunt, credibilia prorsus esse propter demonstrationem. Quapropter & de his ipsis speculari aliquos non absurdum esse existimavi.

---

ARCHI-

---



# ARCHIMEDIS EXOTERICA.

**P**Ræter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* scripta, partim ab illo facta; sed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

I. Ex *Vitruvio* ad hunc sensum narrat. Cùm *Hiero Syracensium* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; posteaque intellexerat Artificem, Auri parte surreptâ, Argentum æquali pondere substituisse; *Archimede* ea de re consuluit. Ille autem Balneum ingressus, effluentem aquam conspiciatus, hinc ansam cepit determinandi, quantum Auri surreptum fuerat; statimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus *Εὕρηκα*, *Εὕρηκα*, domum se contulit. Nempe, cum Aurum, ejusdem ponderis, minoris molis sit quàm Argentum; moleque corporis irregularis non aptius colligi possit, quàm ex Aquæ mensurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum spatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejusdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum esse, quantum Auri & quantum Argenti miscuerat Artifex.

Invenum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum instituerit, & quantâ subtilitate singulorum molem rimatus est, non exponit *Vitruvius*; contentus rem crassius exposuisse, quam ipsam (puto) executus est *Archimedes*. Et, siquid ea de re scripsit *Archimedes* ipse, periit. Alii alios modos exposuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in suo *Archimede* promoti; atque *Johannes Baptista Hodierna* in suo *Archimede* Redivivo, impresso *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644 Italicè.

Calculus sic commode instituitur. Pondus Auri quantum est Coronæ, occupet spatium L; Pondus Argenti huic æquale, spatium L + M. Pondus Coronæ, spatium L + N. Ergo, ut N ut ad M, sic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe spatii incrementum



crementum M prodiret si totum Aurum Argento commutatum foret ; adeoque incrementum N, ostendet quantum jam commutatum sit.

2. Ex *Athenaeo* & *Diodoro* ; Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ stupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam , unius hominis operâ : eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, similibusque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujusmodi figuram accommodant : & speciatim *Guido Ubaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenaeo* , memorat *Archimedis Helicem* , cuius ope (cum paucis aliis instrumentis) stupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujusmodi , ex conjecturâ supplent.

Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribasio*, recenset *Archimedis* Trispastum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Nescio an 50000 legendum sit, propter *πντλεμμερμίδιμν.ν.*) Figuramque adhibet has duas. Fig. 286.

287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Ballistas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis instar) aliumque apparatus, quibus contra copias, navesque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum est.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis Pivæa* memorat, seu specula Ustoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu posthumo, *Del Specchio Ustorio*, (*Bononia* impresso in 4°, Anno 1650.) Italicè fusius agit.

7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano* , memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydrosopica : nec hujusmodi tantum Instrumenta constructa, sed & libros ab *Archimede* conscriptos.

8. Ex *Claudiano*, *Archimedis Σπασσοποιία* memorat ; seu machinam Coelestium motuum æmulam.

Verum quum horum omnium nihil jam exstet ab *Archimede* conscriptum ; non nisi ex dubiis conjecturis suppleri possunt.



# ERRATA sic corrigantur :

| In Argumento. |      |   |
|---------------|------|---|
| 1             | 8    | A pro B.  |
| 2             | 13   | X pro H & G.  |
| 2             | 2    | Z vel Y pro X.  |
| 8             | pe.  | CFH pro FGM.  |
| 9             | 19   | BM pro DM.  |
| 10            | 34   | FNOL pro PXOL.  |
| 11            | 3    | AG pro HG.  |
| 16            | 10   | FE — DE pro GF — DE.  |
| 16            | 17   | DEq. EB x BA :: Tq. Mq pro<br>DEq. EB x AB :: Mq. Tq.   |
| 19            | 11   | CF pro CE.  |
| 20            | ul.  | CD pro FB.  |
| 21            | 4    | QAE — EB pro Q.EB — AE.   |
| 22            | 28   | BA pro DA.  |
| 23            | 4, 5 | AG pro AE.  |
| 30            | 1    | LX pro LK.  |
| 31            | 1    | In margine, DE pro DC.  |
| 31            | 14   | $\frac{4DEq}{BX}$ pro $\frac{4FEq}{BX}$   |
| 31            | 26   | BH pro EH.  |
| 35            | 5    | FG pro OG.  |
| 35            | 6    | FH pro OH.  |
| 37            | 11   | CB pro AB.  |
| 37            | pe.  | YZ pro VZ.  |
| 38            |      | Fig. 49. pro 94.  |
| 41            | 13   | BH pro BE.  |
| 43            | pe.  | BAC pro BAD.  |
| 45            | 25   | XV pro XY.  |
| 52            | 22   | A, B pro A, F.  |
| 54            | 13   | A E pro B E.  |
| 58            | 25   | M C pro Z C.  |
| 59            | ul.  | majus p o minus.  |
| 61            | 16   | GI pro CI.  |
| 64            | 22   | LE pro LI.  |
| 64            | 26   | O pro I.  |
| 64            | 29   | DC pro GD.  |
| 65            | 6    | B X K pro B X R, & B F pro B E.   |
| 66            | 16   | A F pro A G.  |
| 68            | 17   | DBq pro DK q.   |
| 68            | 33   | H F x F E pro H F x F D.  |
| 68            | 34   | GI pro GL.  |
| 69            | 22   | TO pro IO.  |
| 70            | 4    | sectionum pro contingentium.  |
| 70            | 8    | A E pro A F.  |
| 70            | 10   | LSH pro LSE, & ALN pro ALM.   |
| 74            | 22   | Deest + inter AEq & CX x XA.  |
| 75            | pe   | Deest + inter EXq & CE x ED.  |
| 77            | 18   | E C pro F C.  |
| 78            | 21   | Citatur 4 & 22.6 pro 19.5.  |
| 79            | 10   | A B pro A D.  |
| 79            | 26   | K O B pro K O P.  |
| 85            | 5    | F A pro D F.  |
| 91            | ul.  | OP pro OD.  |
| 96            | pe.  | FG pro FM.  |
| 99            |      | Ult. duæ lineæ ita corrigantur,<br>FN.FL::NK.KL & (ob sect.<br>AMD) NK.KL::NM.ML<br>quar FN.FL::NM.ML <i>Q.e.a.</i> |
| 101           | 8    | A D, B G pro A C, B C.  |

## In Citationibus.

Prop. 9. nota f, pro 17.6 lege 16.6. pr. 16. n. a, 13 hujus l. 12 hujus. pr. 20. n. c, 3.6 Libri I.  
1.1.6. pr. 33. n. c, 4.1 4.2. pr. 38 n. c, 21 hujus l. 37 hujus. pr. 44 n. a, 31 hujus l. 37  
hujus. pr. 45. n. f, 7.1 l. 7.5. pr. 45. n. g, 4.1 l. 4.6. pr. 51. n. m, 7.1 l. 7.5.

Prop. 2. nota g, pro 6.5 & 3 ax. 1 lege 6 & 5.2. pr. 4. n. g, 53. hujus l. 53.1 Libri II.  
hujus. pr. 48. n. g. deest hac citatio (17 ax. 1.)

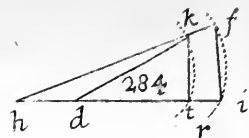
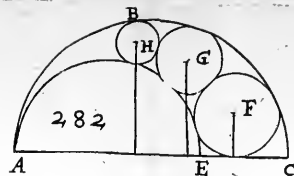
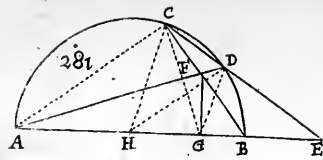
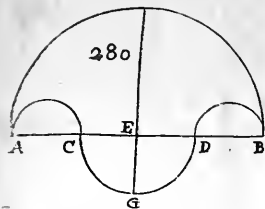
Prop. 4. nota a, pro cor. 44 hujus lege cor. 15.2 hujus. pr. 8. n. k, 8.1 l. 4.3 Libri III.  
hujus. pr. 16. n. d, & pr. 16, 17, 18, 19. n. b, in singulis pro 16.5 l. 4.6. pr. 20.  
n. c, 16.3 l. 4.6. pr. 21. n. b, 46.5 l. 4.6. pr. 22. n. k, 2.6 l. 6.2. pr. 23.  
n. b, 16.5 l. 4.6. pr. 23. n. d, l. facile deducitur ex 15.3 hujus. pr. 33. n. d,  
2.6 l. 6.2. pr. 34. n. c, 15.6 l. 16.6. pr. 37. n. b, 49 & 51. hujus l. 2 & 11.3 hujus.  
pr. 44. n. b, & pr. 45. n. c, pro 15.6 l. 16.6. pr. 56. n. p, ex 2 vel 4.8 l. 2 vel 4.3.

Prop. 14 nota a, pro cor. 14 hujus lege 5 hujus pr. 15. n. b, 36.1 hujus l. 39.3 hujus. Libri IV.  
pr. 21. n. a, 6 hujus l. 8 hujus. pr. 21. n. b, 15 hujus l. 17 hujus.

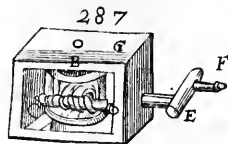
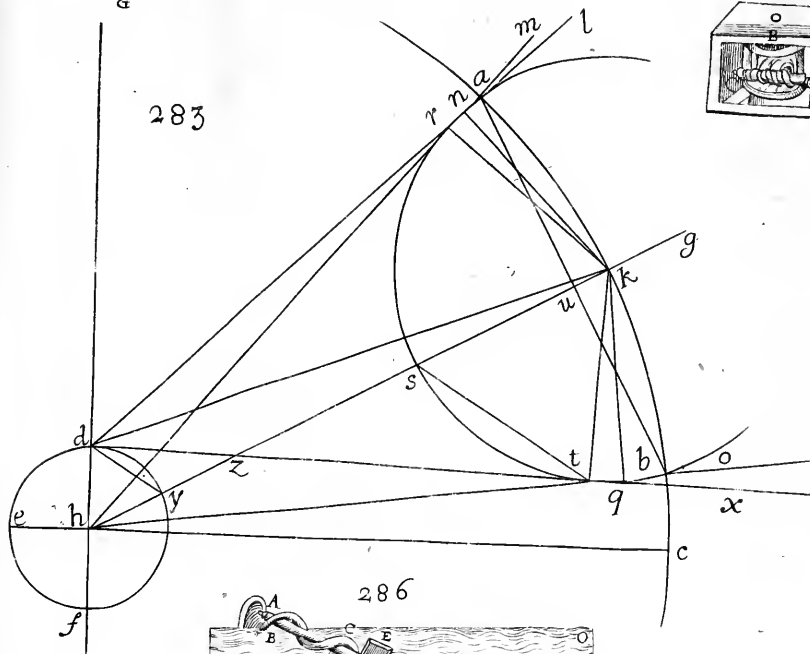
## In Schematis.

Fig. 14. deest lineæ F G. fig. 30. deest D ubi EH occurrit sectioni. fig. 136. pro H  
lege B. fig. 148 deest D ubi lineam AC bisecat KB. fig. 176. deest E. fig. 194. deest  
ubi Y ubi LX diametro occurrit. fig. 276. deest E ubi DK sectioni occurrit.

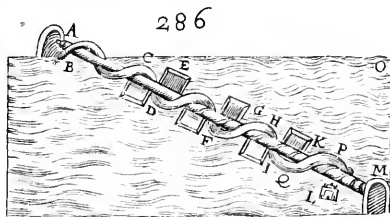
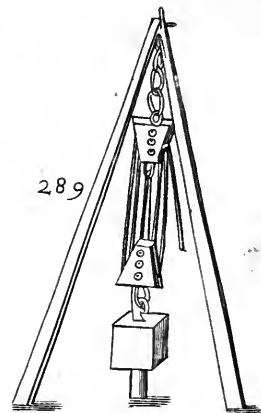
[illegible]



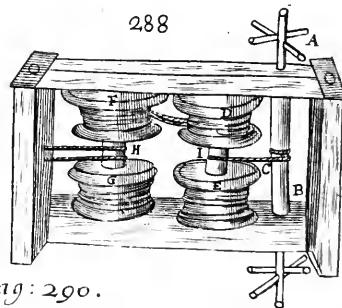
283



289



288



Archimed: Pag: 290.



